不分明拓扑译文集

FUZZY

汉中师范学院数学系

编 印 说 明

一九六五年，美国控制论专家A·Zadeh在《信息与控制》杂志(美)上发表了《Fuzzy Sets》，从此诞生了一门新兴的数学——不分明数学(或模糊数学)。不久又有人，将不分明集的思想，引进了拓扑空间理论。十多年来，不分明数学，特别是不分明拓扑学发展很快，受到了各国数学家的重视。近年来，我国的不分明拓扑研究蓬勃开展，取得好结果，四川大学蒲保明、刘应明同志的这方面研究成果在《1981年中国百科年鉴》上已列为我国为数不多的几项重大数学成果予以介绍。

本文集，搜集了一九六五年到一九八〇年期间，国外关于不分明拓扑方面的部分文献。编译成册，铅印交流，既是为了自己对不分明拓扑学开展学习和研究，同时也是为了向数学界的同行们，互相学习，共同提高。本文集的翻译工作，是由七个单位十二位同志协作完成的。他们是：赵万忠(河北化工学院数学教研室)胡诚明(内蒙古大学数学系)李崇靖、刘畅畅(宁夏大学数学系)孟杰、董根银、张露娜(西北大学数学系)张肇炽(西北工业大学数学教研室)、滙肇基(西安电力学校数学组)、房正祥、蔡秉衡、蒲义书(汉中师范学院数学系)。

本文集共载二十三篇文章，新译十八篇，其中五篇是为了读者阅读方便而转载的。

为了使译名统一和提高译文质量，去年三月份，由各协作单位派一人到我院酌商，对译文作了进一步审订。但由于不分明拓扑是一门新学科，加之参加翻译的同志，多数是不分明数学的初学者，特别是由于我们自己的水平不高，错误一定很多，敬请读者批评指正。

特别值得提出的是，四川大学蒲保明教授、刘应明付教授为本文集写了序言，并允许我们转载了他们发表在《四川大学学报》及《数学汇刊》上的《不分明拓扑学I—不分明点的邻近构造与Moore—Smith式收敛》《不分明拓扑学Ⅱ：乘积空间与商空间》《不分明拓扑学的进展I》等文。这不仅对学习本文集的文献有很大帮助、而且对学习和

研究不分明拓扑学也有重要的指导意义。我们对他们的支持表示衷心的感谢！

本文集能够铅印，主要由于我院教学处领导的关心、重视和支持。院教学科和教材设备课的领导，也对文集的铅印给了大力的支持。当然，文集的铅印与各协作单位领导的大力支持也是分不开的。在此，我们一并表示感谢！

我们对王戌堂、王国俊、汪培庄、袁萌、耿春仁等同志的关心和支持也表示感谢。

需要提出的是，我系蒲义书同志在本文集的组稿和联络等方面做了大量的工作。

汉中师范学院数学系

一九八二年四月一日

前　言

不分明集论（Fuzzy set）是美国控制论专家，加州贝克利大学名教授查德（Zadeh）在1965年创立的。从实践角度看，这个理论正是吸取人脑对于事物的识别与判决十分有效与灵活的优点，建立了一套数学方法。现在这个理论正在解决模式识别等实际问题中取得很大进展。另一方面，从纯理论角度看，不分明集的提出进一步丰富了经典集合的概念。如所周知，集合的概念是近代数学的最基础概念。它的任何改变都会使数学的各分支受到深刻的影响。也就是说，作为数学结构来说，存在着数学的分支的不分明化的趋势。总的来说，这当然是一个漫长的过程。在这方面一般拓扑学算是成熟较快的一个分支。

自从1968年C、L、Chang发表关于不分明拓扑空间第一篇论文起算，到现在不过十来个年头，但这方面论文已逾百篇。有名杂志如《法国科学院通报》（C·R．Acad Sci），《拓扑学及其应用》（Top．& its Appl．），《数学分析及其应用》（JMAA），《不分明集与系统》（Fuzzy sets and systems）等刊物上都常有这方面论文发表，在最早期的工作中，一个中心问题是合适的收敛理论的建立问题。这个问题的本质困难在于不分明拓扑空间中邻近构造的特点与传统的邻域系给出的有很大的不同。在引入所谓“重域系”之后，一个完整的Moore—Smith收敛得以建立。与之同时，外刊上以Hutton等人为代表，沿着“无点化”（Poihtless）方向前进，在正规性，不分明单位区间，一致空间与度量化等方面作了较深刻的工作。之后，在商空间与积空间，紧性等方面都有好的工作。最近在嵌入定理与紧化上也有较系统的工作。所以无论从论文的数量与质量上，还是在研究的课题的广度与深度上，不分明拓扑空间理论都可以说已经历了襁褓时期到了比较成熟的阶段。有的人说它已到了“登堂入室”的地步。

不分明拓扑空间通常是以一般拓扑空间为特例的。大家知道，理论的框架扩大了，一方面固然可以包含更多的特款；但另一方面，则可能失去一些重要性质，从而相对地显得内容贫乏。这里有一个框架

的广泛性恰到好处的问题。现在不分明拓扑空间的理论框架的情形如何呢？经过中外数学家的努力，研究工作的实践已肯定地回答了这个问题。就以美国数学家P、J. Kelley 的名著《一般拓扑学》来作比较，这部著作的前六章的基本结果都已被拓广到不分明拓扑空间中来。而且在这个更大框架中，原来概念与结论的实质与局限都可以看得更清楚。关于传统的邻域系思想的局限性分析及其一种替代——重域系的引入就是一例。同时，由于最一般的L—不分明拓扑理论中是以格作为真值集的，其讨论常常涉及到代数结构，主要是格的研究。这种理论中一些代数性质的探讨从代数学上看似乎具有独立的兴趣。

数学理论的生命力除了能解决学科自身内部矛盾之外，还很重要地表现为与具有实际背景的重要问题的关联程度。大家知道，查德在其奠基性论文《不分明集》(Inform,Contr. 8(1965), 338—353)中花了近半的篇幅讨论不分明凸集的性质。因为正如该文所指出，这方面研究与模式识别及优化问题关系密切。查德在该文中关于不分明凸集的两个主要结论都有些需待完善之处。其不足正是由于缺少适当拓扑条件。这种现象在不分明集理论初期几乎是不可避免的、现在用不分明拓扑空间理论的成果都作了完善。(请分别参看 M.D.Weiss, J.Math.Anal, Appl. 50(1975), 142. 与刘应明，不分明凸集的若干性质，数学物理学报，1(1981), NO.2.)也就是说，不分明拓扑空间的研究并非纯粹地是寻找"更广泛框架"，追求"更一般结果"这种类型的工作，它有丰富的实践背景。

不分明拓扑空间理论虽已"登堂入室"，将一般拓扑空间理论中诸如点的邻近构造，收敛理论，积空间与商空间的理论，度量化与嵌入定理以及一致空间理论作了成功的拓广，但它毕竟是一个新兴分支，还有许许多多的待开垦的处女地。现在在汉中师院数学系的大力支持下，蒲义书同志联系了七个院校的十几位同志，完成了这本《不分明拓扑学译文集》的翻译工作，把1980年以前外刊中有关不分明拓扑学的重要文献译成中文，汇编成册。这无疑会推动更多同志从事这个领域的学习与研究，是一件很有意义的事。在不分明拓扑学这个领域中，我国学者已作了重要的工作。我们相信，在更多有志于这个领域研究的同志参加下，同心协力，我们可以作出更出色的工作。

蒲保明 刘应明 1981.7.8写于川大

目　录

不分明拓扑学Ⅰ—不分明点的邻近构造与Moore-Smith式收敛*

蒲保明　　刘应明

近年来发展起来的不分明集（fuzzy set）[1]概念使得有可能用数学处理广泛存在的不分明现象。关于不分明拓扑学的工作也已不少[2]—[8]，我校周浩旋同志也作了有关于不分明拓扑与分明拓扑的关系方面有意思的工作(未发表)，但是有两个基本问题还有待解决。一、关于不分明点概念及其邻近构造。在[8]中所给的不分明点的定义既不能以正常点为特款，而且只是循着一般拓扑学（以下称作分明拓扑学）关于邻域系的思路进行研究，不能反映出不分明拓扑学中邻近构造的新特性，所导出的性质较呈病态，正如该作者自己所指出的那样，与分明拓扑学中直观性分歧很大。本文所给不分明点定义是以分明点（正常点）为特款的；对不分明点邻近构造，除了已有的邻域系以及点与集合的一种关系"属于"需要沿用外，还要引入更为重要的称之为重域系的结构以及点与集合之间一种新的关系"重于"；在分明拓扑学中，邻域系与重域系，关于"属于"与关系"重于"皆重而为一。二、关于收敛问题。已往工作中，只涉及到不分明集合的序列的收敛且由于局限于用传统的邻域系来刻划"邻近"概念，其结果不令人满意。正如[6]所指出，不分明拓扑学需要新的收敛与聚点的概念；至于一般的Moore-Smith式的网（net）收敛（亦称半序收敛）则无从着手。这两个问题由于目前的处理，在分明拓扑学代表性著作[10]中涉及点的邻近构造与收敛问题的第Ⅰ、Ⅱ章的定理，除一、二条不甚紧要者外，在不分明拓扑学中都得到推广，也就是说，这两个基本问题解决程度与分明拓扑学中相应问题的解决程度是差不多的。在本文所给的框架下，不分明拓扑还有许多性质可以研究，这将在以后一些工作中给出。

1．预　　备

因为不分明数学中不少概念与表述尚未定型，特把散见于论文[2]—[9]中有关的概念作一简要的回顾，本文中X总表示一个非空（分明）集。

定义 1·1　X至单位区间[0, 1]的函数A称作X上一个不分明集，对于$x\in X$，$A(x)$称作A在点x的从属度(grade of membership)，X称作不分明集A的承载集(carrier)。X的子集$\{x\in X \mid A(x)>0\}$称作A的承集，记作Supp A或A_0。若A仅取值0或1，A又称作X上分明集，分明集A与作为X的子集的Supp A以后一般是不加区别的；特别地，在X上恒取值1的（不）分明集就用X来表示。此外，在X上恒取零值的（不）分明集除了用ϕ外也常用Φ表示。

*本文于1976年6月12日收到。

定义 1·2 若对每个 $x\in X$，有$A(x)=B(x)$，则称不分明集 A 与 B 相等，记作$A=B$。若对每个 $x\in X$，有 $A(x)\leqslant B(x)$，则称 A 包含于 B，记作$A\subset B$。

定义 1·3 设 I 为指标集，$\mathscr{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$为 X 上不分明集族，则并 $\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$（又可记作$\bigcup\mathscr{A}$）以及交$\bigcap\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$（又可记作$\bigcap\mathscr{A}$）亦为$X$上不分明集，分别由下式定义：

$$(\bigcup\mathscr{A})(x)=\sup\{A_\alpha(x)\mid\alpha\in I\}\qquad x\in X,$$

$$(\bigcap\mathscr{A})(x)=\inf\{A_\alpha(x)\mid\alpha\in I\}\qquad x\in X,$$

定义 1·4 A 的补集，记作 A'，定义为 $A'(x)=1-A(x)$，$x\in X$。

由实数域的上下确界性质，易证下列 De Morgan定律成立：

$$(\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\})'=\bigcap\{A_\alpha'\mid\alpha\in I\}$$

定义 1·5 X 上不分明集族$\mathscr{T}$称作X上一个不分明拓扑，若下列三条件成立：(1) Φ，$X\in\mathscr{T}$。(2) 若$A,B\in\mathscr{T}$，则$A\bigcap B\in\mathscr{T}$。(3) 若每个 $A_\alpha\in\mathscr{T}(\alpha\in I)$，则$\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}\in\mathscr{T}$。此时，称偶对（$X$，$\mathscr{T}$）为不分明拓扑空间，$\mathscr{T}$ 中集称作（拓扑$\mathscr{T}$下）开集，开集的补集称作闭集。

X 上不分明拓扑$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$作为集合来说，若有包含关系$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$，则说拓扑$\mathscr{T}_2$较细，拓扑$\mathscr{T}_1$较粗。

定义 1·6 设$\mathscr{T}$为 X 上不分明拓扑。$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{B}$称作$\mathscr{T}$的一个基，若 $\mathscr{T}$ 中每个不分明集可以表作$\mathscr{B}$中若干集的并；$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{S}$称作T的一个子基，若$\mathscr{S}$中有限个集的交的全体形成$\mathscr{T}$的基；当$\mathscr{T}$有可数基时，称（X，$\mathscr{T}$）为满足第二可数公理或说是C_{11}空间。

定义 1·7 设 A 与诸 A_α（$\alpha\in I$）是 X 上不分明集，若$\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}\supset A$，则称集族$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$为 A 的一个复盖；若有 I 的子集 I_1，使得$\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in I_1\}\supset A$，则称$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$为子复盖。

本文中（X，$\mathscr{T}$）总表示一个不分明拓扑空间。不分明拓扑、不分明集等等一般常径称作拓扑、集等等，但是分明拓扑学中相应概念却常常冠以形容词“分明”以示强调。下文中诸定义与结论都是以习知的分明拓扑学中相应定义与结论为特款的，关于此点一般不再说明。

2．不分明点概念及其邻近构造

定义 2·1 *仅在点 $x\in X$ 处取值 $\lambda>0$，在其余点取零值的不分明集称作X上的不分明点，常记作 x_λ，点 x 称作它的承点。

定义 2·2 当 $0<\lambda\leqslant A(x)$，称点 x_λ 属于A，记作 $x_\lambda\in A$。显然 A 可表作所有属于 A 的点的并。

定义 2·3 若（$A\bigcap B$）$(x)\neq0$，称 A 与 B 相交于点 x，或者简单地说：A 与 B 相交。

定义 2·4 在（X，$\mathscr{T}$）中，集 A 称作点 x_λ 的邻域，若有开集$B\in\mathscr{T}$，使 $x_\lambda\in B\subset A$；x_λ 的所有邻域组成它的邻域系，本身是开集的邻域称作开邻域。

对偶地，我们引入“重于”等概念

定义 2·2′ 当 $\lambda>A'(x)$，即 $\lambda+A(x)>1$，称点 x_λ 重于集 A。

---

*这里所给不分明点概念亦即［9］§4中所谓的 Singelton，不过对其十分重要的邻近构造的探讨［9］是不涉及的。

定义 2·3′ 当 $A(x)>B(x)$，即 $A(x)+B(x)>1$，称 A 与 B 相重于点 x，或者简单地说：A 与 B 相重。显然，当 A 与 B 相重于点 x 时，$A(x)$ 与 $B(x)$ 均不为零，从而 A 与 B 必相交于点 x。

定义 2·4′ 在（X, $\mathscr{T}$）中，集 A 称作点 x_λ 的重域（或 Q—邻域），若有开集 $B\in\mathscr{T}$ 使 $B\subset A$ 且 x_λ 重于 B。x_λ 所有重域组成它的重域系，本身是开集的重域称作开重域。

注解：不分明点的重域一般不包含该点，关于一点的"邻近构造"却不包含该点的邻域空间远在1916年就由Fréchet研究了（参看M. Fréchet, Les Espases abstraits, Paris, 1928, 页172的注）并形成了现在称之为Fréchet（V）空间的理论（参看W. Sierpinski, General topology, Toronto, 1952, 章Ⅰ）。不过，在这种理论中，要求集 A 与其补集 A' 不相交，而这个事实在不分明拓扑学中显然一般不再保持，所以目下关于重域结构的研究并不同于（V）空间理论。**

代替分明拓扑学中 A 与 A' 不相交这一事实的是 A 与 A' 不相重，更一般些有

命题 2·1 集 $A\subset B$ 当且仅当 A 与 B' 不相重；特别地，$x_\lambda\in A$ 当且仅当 x_λ 不重于 A'。

这从 $A(x)\leqslant B(x)$ 当且仅当 $A(x)+B'(x)=A(x)+1-B(x)\leqslant 1$ 即明。

命题 2·2 不分明点 e 在（X, $\mathscr{T}$）中重域系记作 $\mathscr{U}_e$，则有

(1) 若 $U\in\mathscr{U}_e$，则 e 重于 U。

(2) 若 U, $V\in\mathscr{U}_e$，$U\cap V\in\mathscr{U}_e$。

(3) 若 $U\in\mathscr{U}_e$，$U\subset V$，则 $V\in\mathscr{U}_e$。

(4) 若 $U\in\mathscr{U}_e$，则有 $V\in\mathscr{U}_e$ 使 $V\subset U$ 且对每个重于（相应地属于）V 的不分明点 d，有 $V\in\mathscr{U}_d$。

反之，对 X 上不分明点 e，$\mathscr{U}_e$ 为一不分明集族且满足上述条件 (1)—(3)，那么下列集 U 组成 X 上一个不分明拓扑 $\mathscr{T}$：当任一不分明点 e 重于 U 时，必有 $U\in\mathscr{U}_e$；此外，若 $\mathscr{U}_e$ 还满足条件（4），则 $\mathscr{U}_e$ 就是 e 在拓扑 $\mathscr{T}$ 下的重域系（相应地邻域系）。

证明是直接的，参阅［10］问题1.B.

命题 2·3 设 $\mathscr{A}=\{A_\alpha\}$ 为上不分明集族，则不分明点 e 重于 $\bigcup\mathscr{A}$ 当且仅当有某 $A_\alpha\in\mathscr{A}$ 使 e 重于 A_α。

当 e 重于集 A_α 时，自然亦重于 $\bigcup\mathscr{A}$. 反之，由上确界性质及重于定义，逆命题也易给出。

命题 2·4 在（X, $\mathscr{T}$）中，开集族 $\mathscr{B}$ 是拓扑基的充要条件是对 $\mathscr{T}$ 中任一开集 A 及任一重于 A 的不分明点 e，有 $B\in\mathscr{B}$ 使 e 重于 B 且 $B\subset A$。

证：必要性由拓扑基定义及命题2.3的必要性部分即得。今证充分性。若 $\mathscr{B}$ 不是拓扑基，则有 $A\in\mathscr{T}$ 使 $G=\bigcup\{B\in\mathscr{B}\mid B\subset A\}\neq A$，即有 x 使 $G(x)<A(x)$，记 $\lambda=1-G(x)>0$，得不分明点 $e=x_\lambda$。由 $A(x)+\lambda>G(x)+\lambda=1$，知 e 重于 A。但 $\mathscr{B}$ 中任包含于 A 的集 B 皆包含于 G，从而 $B(x)+\lambda\leqslant G(x)+\lambda=1$，即 e 不重于 B，矛盾于题设。

**在一类特殊的不分明拓扑空间中，重域与邻域是有一种对偶的关系，请参看［13］，另对开重域的补集称作相应点远域，有时论证中邻使用域有方便之处［14］。

3. 局部基，一个反例

定义 3·1 在（X，$\mathscr{T}$）中，不分明点 e 的若干重域（相应地邻域）形成一集族 $\mathscr{B}$，若对 e 的每个重域（相应地邻域）A，有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $B\subset A$，则称 $\mathscr{B}$ 为 e 的一个重域基（相应地邻域基）。若（X，$\mathscr{T}$）中每个不分明点处都有可数的重域基（相应地邻域基），则空间（X，$\mathscr{T}$）称作满足 Q—第一可数公理（相应地满足第一可数公理），或称之为 $Q-C_1$ 空间（相应地 C_1 空间）。

命题 3·1 若（X，$\mathscr{T}$）为 C_1 空间，则工必是 $Q-C_1$ 空间。

证：任取不分明点 $e=x$，在（$1-\lambda$，1］中取收敛于 $1-\lambda$ 的序列 μ_n。记 $x_{\mu_n}=e_n$。对每个 n，取 e_n 的可数开邻域基 $\mathscr{B}_n$（注意：显然允许假定 e_n 的邻域基是可数开集族）。$\mathscr{B}_n$ 中每个集 B 满足 $B(x)\geqslant\mu_n>1-\lambda$，亦即 B 即为 e 的重域，于是诸 $\mathscr{B}_n$ 中所有的集组成 e 的一个可数开重域族，记作 $\mathscr{B}$. 任取 e 的开重域 A，A、x）$>1-\lambda$. 由于 $\mu_n\to1-\lambda$，有 m 使 $A(x)\geqslant\mu_m>1-\lambda$，从而 $e_m\in A$，即 A 为 e_m 的开邻域，于是有 $\mathscr{B}_m$（亦是 $\mathscr{B}$）中集 $B\subset A$，$B(x)\geqslant\mu_m>1-\lambda$，这说明 $\mathscr{B}$ 为 e 的可数重域基。

命题 3·2 若（X，$\mathscr{T}$）为 C_{11} 空间，则也必是 $Q-C_1$ 空间，

证：设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{T}$ 的可数基，对任一点 e，$\mathscr{B}$ 中所有与 e 相重的（可数个）开集族记作 $\widetilde{\mathscr{B}}$，由命题2.3，易证 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 形成 e 的可数重域基。

命题 3·1 的逆一般不真，下面构造一 C_{11} 空间，从而是 $Q-C_1$ 的，但它不是 C_1 的。

定义 3·2 [6][5] 设（X，$\mathscr{U}$）为分明拓扑空间，易知所有在拓扑 $\mathscr{U}$ 下取值于［0，1］的下半连续函数全体 $F(\mathscr{U})$ 形成一个 X 上不分明拓扑，空间（X，$F(\mathscr{U})$）称作由（X，$\mathscr{U}$）诱出的不分明拓扑空间。

引理 3·1. 设（X，$\mathscr{U}$）为分明拓扑中完全正则空间，$h\in F(\mathscr{U})$，则存在拓扑 $\mathscr{U}$ 下若干连续函数形成的集族 $\mathscr{T}$，使 $h=\sup\{f\mid f\in\mathscr{T}\}$，换句话，$X$ 上拓扑 $\mathscr{U}$ 下的连续函数族（限取值于［0，1］者）形成 $F(\mathscr{U})$ 的一个不分明拓扑基。

证明可参照[11]章九节1的命题5的证明。

在本节内，以下设（X，$\mathscr{U}$）为实轴的子空间［0，1］. 记（$-\infty$，1］中有理数全体为 T. 对每个正整数 n，将 X 进行 2^n 等分，其 2^n+1 个分点依次记作 x_n^k（$k=0，1，\cdots，2_n$）. 对固定的 n，在每点 x_n^k 上取值 $f_k\in T$，在每个等分区间 $\Delta_k=[x_n^k，x_n^{k+1}]$ 上为线性的函数 f 全体显然形成一可数的连续函数族 $\widetilde{\mathscr{B}}_n$. 对 $f\in\widetilde{\mathscr{B}}_n$，由 $f^+(x)=\max\{f(x)，0\}$ 定义一函数 f^+，它显然连续且取值于［0,1］. 记 $\mathscr{B}_n=\{f^+\mid f\in\widetilde{\mathscr{B}}_n\}$，$\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$. 对可数连续函数族 $\mathscr{B}$，我们有

引理 3·2 设 g 为取值于［0，1］的 X 上连续函数，又设 $\varepsilon>0$，则有 $f^+\in\mathscr{B}$ 使

$$g(x)-\varepsilon<f^+(x)\leqslant g(x)\qquad x\in X,$$

从而 g 可表成 $\mathscr{B}$ 中可数个函数的上确界。

证：对 $\varepsilon>0$，由 g 在 X 上一致连续性，有整数 n，使 X 的 2^n 等分的每个等分区间上，

g 的最大值与最小值的差（即振幅）小于 $\varepsilon/8$。对每个分点 x_n^k，取有理数 $f_k\in T$ 使 $g(x_n^k)-\varepsilon/8>f_k>g(x_n^k)-\varepsilon/4$。记在 x_n^k 上取值 f_k，在诸等分区间上为线性的函数为 f，那么 f 即所求，事实上，任取等分区间 $\Delta_k=[x_n^k,\ x_n^{k+1}]$，不失一般性可设 $f_k\geqslant f_{k+1}$，那么 f 在 Δ_k 上以 f_k 为最大值，注意到 g 在 Δ_k 上振幅小于 $\varepsilon/8$，对每个 $x\in\Delta_k$，有 $g(x)>g(x_n^k)-\varepsilon/8>f_k\geqslant f(x)$，从而对 $x\in X$，有 $g(x)>f(x)$，另一方面，f 在 Δ_k 上振幅为 $f_k-f_{k+1}<\left(g(x_n^k)-\frac{\varepsilon}{8}\right)-\left(g(x_n^{k+1})-\frac{\varepsilon}{4}\right)=g(x_n^k)-g(x_n^{k+1})+\frac{\varepsilon}{8}<\frac{\varepsilon}{4}$，于是对 $x\in\Delta_k$，有 $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k|+|f_k-g(x_n^k)|+|g(x_n^k)-g(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{8}<\varepsilon$，从而对 $x\in X$，有 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$，亦即 $g(x)-\varepsilon<f(x)<g(x)$。又因为 $g(x)\geqslant 0$，易见有 $g(x)-\varepsilon<f^+(x)\leqslant g(x)$，即 f^+ 为所求。至于引理后半，只要取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$ 记相应的 f^+ 为 $f_n^+\in\mathscr{B}$，易见 g 为诸 f_n^+ 的上确界。

定理 3·1 设（X，$\mathscr{U}$）为实轴的子空间 $[0,1]$，$\mathscr{T}=F(\mathscr{U})$ 为（X $\mathscr{U}$）诱出的不分明拓扑，则（X，$F(\mathscr{U})$）是 C_{11} 空间，但却不是 C_1 的。

证： 由引理 3·1 与 3·2，引理 3·2 中所给的可数集族 $\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$ 显然形成 $\mathscr{T}$ 的可数基，即（X，$\mathscr{T}$）为 C_{11} 的。今任取 X 中一分明点 x，不失一般性可设 x 为 $[0,1]$ 中零点，考查以 x 为承点且取值为 1 的（不）分明点 e。若可数个开集 $B_n\in\mathscr{T}(n=1,2,\cdots)$ 形成 e 的邻域基，那么由 $e\in B_n$ 有 $B_n(x)=1$。又由下半连续性，对 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，有 x 在拓扑 $\mathscr{U}$ 下的开邻域 G_n 使对 $y\in G_n$，恒有 $B_n(y)>1-\varepsilon=1-\frac{1}{n}$。于是对正整数 n，可归纳地取出 X 分明点 $y_n>0$，使 $y_n\in G_n$ 且 $y_n<\frac{y_{n-1}}{2}$（约定 $y_0=2$）。今构造 X 上不分明集 B 如下：B 在 y_n 上取值 $1-\frac{1}{n}$，在区间 $[y_n,\ y_{n-1}]$ 上为线性，在大于 y_1 处取零值（$=B(y_1)$），此外 $B(x)=1$。易见 B 是连续的且取值于 $[0,1]$，从而 $B\in\mathscr{T}$。又因 $B(x)=1$，B 为 e 的开邻域，但 $B_n(y_n)>1-\frac{1}{n}=B(y_n)$，故任一 B_n 不包含于 B。这与 $\{B_n\}$ 为 e 的邻域基矛盾，所以（X，$\mathscr{T}$）不是 C_1 空间。*

4. 闭包与 Kuratowski 的十四集定理

定义 4·1 （X，$\mathscr{T}$）中所有被包含于集 A 的开集的并称作 A 的内集，记作 A° 或 $\mathrm{Int}_{\mathscr{T}}A$。显然 A° 是含于 A 中最大开集且 $(A^\circ)^\circ=A^\circ$。

* 其实这个不分明拓扑空间（X，$\mathscr{T}$）在每个不分明点处都不是 C_1 的。关于这个事实的证明可相仿进行。

定义 4·1′ $(X, \mathscr{T})$中所有含集A的闭集的交称作A的闭包，记作$\overline{A}$或$\mathrm{cl}_{\mathscr{T}}A$. 显然$\overline{A}$是包含$A$的最小闭集且 $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

定理 4·1 不分明点e属于A°的充要条件是e有一邻域包含于A.

证明是直接的，省略。

定理 4·1′ 不分明点$e=x_\lambda$属于$\overline{A}$的充要条件是e的每个重域与A相重。

证： x_λ属于$\overline{A}$的充要条件为对每个闭集$F \supset A$，恒有$x_\lambda \in F$，即$F(x) \geqslant \lambda$. 取补集，这个充要条件可表述为：对每个开集$B \subset A'$，恒有$B(x) \leqslant 1-\lambda$，或者说，对满足条件$B(x) > 1-\lambda$的开集B，B不含于A'. 由命题2·1，B不含于A'等价于B与$(A')'=A$相重。这样我们证明了：$x_\lambda \in \overline{A}$的充要条件为$x_\lambda$的每个开重域$B$与$A$总是相重，这与题给的充要条件显然是等价的。

定义 4·2 若点e的每个重域与集A恒相重，称e为A的一个附着点。

系 $\overline{A}$是A的所有附着点的并。

定理 4·2 $A^\circ = (\overline{(A')})'$，$\overline{A} = ((A')^\circ)'$，$(\overline{A})' = (\overline{A'}) = (A^\circ)'$.

证： 所有包含于A的开集全体记作$\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$，那么$A^\circ = \bigcup \mathscr{A}$. 显然集族$\mathscr{A}' = \{A_\alpha'\}$为所有包含$A'$的闭集族，那么$\overline{(A')} = \bigcap(\mathscr{A}')$. 由De Morgan定律，有$(\overline{(A')})' = (\bigcap(\mathscr{A}'))' = \bigcup\{(A_\alpha')'\} = \bigcup\mathscr{A} = A^\circ$. 第一式已得，其他各式可类似推出或由第一式推出。

定理 4·3 （十四集定理）。在$(X, \mathscr{T})$中，从一个集A出发，用取内集，闭包及补集这三种运算，可能得到的不分明至多为十四个，而且确有（不）分明拓扑空间，其中（不）分明集A，经过上述三种运算给出十四个两两不同的（不）分明集。

证： 定理后半在分明拓扑学中是熟知的，而前半也可以如分明拓扑学中一样加以证明，因为原来证明中只用到$(A')'=A$，$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$，$(A^\circ)^\circ = A^\circ$以暨定理4·2的诸关系式（参看[10]页45的注及问题1.E.）

定义 4·3 对X上每个不分明集A，对应不分明集$f(A)$，这个对应f称作X上不分明闭包算子，若f满足下列Kuratowski四条公理：(1) $f(\Phi)=\Phi$，(2) $A \subset f(A)$，(3) $f(f(A)) = f(A)$，(4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

易见在不分明拓扑空间中，有$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$（[10]页42—43），从而由$A$对应于$\overline{A}$给出一闭包算子。反之，由任一闭包算子，也可决定相应的拓扑，我们有

定理 4·4 设f为X上不分明闭包算子，记X上满足$f(A)=A$的不分明集A全体为$\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$中各集的补集全体记作$\mathscr{T}$，则$\mathscr{T}$是X上一个不分明拓扑，而且对不分明集B，恒有$\mathrm{cl}_{\mathscr{T}}B = f(B)$. 以后称$\mathscr{T}$为由闭包算子$f$决定的不分明拓扑，

证明可以逐字逐句地（记号相应改动）重复[10]页43定理8的证明，只是其中使用的一个简单事实：当$A \subset B$时，有$f(A) \subset f(B)$，需改证如次：由$A \subset B$，有$B = A \cup B$，从而$f(B) = f(A) \cup f(B) \supset f(A)$.

定义 4·4 属于$\overline{A} \cap \overline{(A')}$的不分明点称作$A$的边缘点。$A$的所有边缘点的并称作$A$的边缘集，记作$b(A)$.

显然 $b(A)=\overline{A}\cap\overline{(A')}$

命题 4·1 $\overline{A}\supset A\cup b(A)$，这里包含符号一般不能改作等号。

命题前半由定义自明，后半由下例给出，应该着重指出，在分明拓扑学中有 $\overline{A}=A\cup b(A)$，所以此是与分明拓扑学不同的一个结果。

例 取 X 中一点 x，令 $\mathscr{T}=\{X,\Phi,x_1\}$，$A=\{x_{\frac{1}{3}}\}$，点 $e=x_{\frac{1}{2}}$，那么 e 在 $(X,\mathscr{T})$ 中开重域或为 X 或为 x_1，皆重于 A，故 $e\in\overline{A}$(定理 4·1′)。但另一方面 $e\notin A$,且 e 的重域 $\{x_1\}$与 A' 不相重，即 $e\notin\overline{(A')}$，从而 $e\notin b(A)$。即 $e\notin A\cup b(A)$。

5. 聚点，杨忠道（C. T. Yang）定理推广

定义 5·1 不分明点 e 称作不分明集 A 的聚点，若 e 是 A 的附着点并且当 $e\in A$ 时，还要求 e 的每个重域与 A 在异于 supp(e)的某点相重。不分明集 A 的所有聚点的并称作 A 的导集，记作 A^d。显然 $A^d\subset\overline{A}$。

定理 5·1 $\overline{A}=A\cup A^d$，A^d为 A 的导集。

证： 记 A 所有附着点形成的集为Ω。由定理 4·1′的系，有$\overline{A}=\cup\Omega$。另一方面，Ω 中点 e 或属于 A，或不属于 A；在后一种情形，按聚点定义，e 是 A 的聚点，从而属于 A^d。于是 $\overline{A}=\cup\Omega\subset A\cup A^d$；至于相反包含关系是自明的。

系 不分明集 A 为闭当且仅当 A 包含每个 A 的聚点。

注意 A 为闭集当且仅当$A=\overline{A}$，由定理 5.1 即得此系。

引理 5·1 在 $(X,\mathscr{T})$ 中，设$A=\{x_\lambda\}$，则 (1) 对 $y\neq x$，有$\overline{A}(y)=A^d(y)$。(2) 当 $\overline{A}(x)>\lambda$时，$\overline{A}(x)=A^d(x)$。(3) $\overline{A}(x)=\lambda$ 当且仅当 $A^d(x)=0$。

证： (1) (2) 及 (3) 的充分性部分由定理 5.1 即有。今设$\overline{A}(x)\neq\lambda$，我们说任一点 x_μ 都不是 A 的聚点，从而 $A^d(x)=0$，事实上当 $\mu>\lambda$ 时，x_μ不属于$\overline{A}$，从而$x_\mu\notin A^d$；当 $\mu\leqslant\lambda$ 时，$x_\mu\in A$ 但此时x_μ任一重域或显然不能与A 在异于点 x 处相重，故 x_μ 也不能是A的聚点。

命题 5·1 在 $(X,\mathscr{T})$ 中，设 $A=\{x_\lambda\}$，则 (1) 当 $A^d(x)>0$ 时，$A^d=\overline{A}$为闭集。(2) 当 $A^d(x)=0$ 时，A^d 为闭集的充要条件为存在开集B^*，使 $B^*(x)=1$ 且对 $y\neq x$，$B^*(y)=(\overline{A})'(y)=(A^d)'(y)$。(3) $A^d(x)=0$ 的充要条件为存在开集 B 使$B(x)=1-\lambda$。

证： (1) 由引理 5·1 的 (3) 及 $\overline{A}(x)\geqslant A(x)=\lambda$，有 $\overline{A}(x)>\lambda$。由引理 5.1 的 (2) 及 (1) 即有$\overline{A}=A^d$。(2) A^d 为闭集当且仅当 $(A^d)'$为开集。当 $A^d(x)=0$ 时，由引理 5·1 的(1)及(3)，即知 $(A^d)'$ 即是题给的 B^*，故 A^d 为闭集当且仅当题示的 B^* 为开集。(3) 由引理 5·1 的 (3)，$A^d(x)=0$ 当且仅当 $\overline{A}(x)=\lambda=A(x)$，这等价于存在闭集 F 使 $F(x)=\lambda$，或说存在开集 B 使$B(x)=1-\lambda$。

下面给出杨忠道结果（[10]页 56）的推广，在不分明拓扑学中，这个结果证明是复杂些。

定理 5·2* $(X,\mathscr{T})$ 中任意不分明集的导集为闭集的充要条件为每个不分明点的导集都是闭集。

证： 必要性自明。任取不分明集 H，由定理 5·1 的系，要说明 $H^d \equiv D$ 为闭集，仅需任取 D 的一个聚点 x_λ，证明 $x_\lambda \in D$，由于 $x_\lambda \in \overline{D} = \overline{(H^d)} \subset \overline{(\overline{H})} = \overline{H}$，由定理 4·1′，$x_\lambda$ 是 H 的附着点，若 $x \notin H$，则 x_λ 为 H 聚点，即 $x_\lambda \in D$。所以不妨设 $x_\lambda \in H$，即 $\lambda \leqslant H(x) = \rho$，考察点，$x_\rho = A$，就 A^d 的两种情形分开讨论。（一）设 $A^d(x) = \rho_1 > 0$。由引理 5·1，有 $\rho_1 > A(x) = H(x)$，所以 $x_{\rho_1} \notin H$，但 $x_{\rho_1} \in A^d \subset \overline{A} \subset \overline{H}$。故 x_{ρ_1} 是 H 聚点，$x_{\rho_1} \in D$。又因 $\lambda \leqslant H(x) < \rho_1$，即有 $x_\lambda \in D$。（二）设 $A^d = 0$，任取 x_λ 的开重域 B，我们将证此时 B 与 H 在异于 x 的某点相重，从而得知 $x_\lambda \in D$。由命题 5·1 的 (2)，有开集 B^* 使 $B^*(x) = 1$ 且在其他点处，B^* 与 $(\overline{A})'$ 同值，记 $C = B \cap B^*$，$C(x) = B(x) > 1-\lambda$，故 C 还是 x_λ 的开重域，因为 x_λ 为 D 的聚点，C 必重于 D 于某点 z，$D(z) + C(z) > 1$。又由于 D 是 H 的诸聚点的并，有 H 的聚点 z_μ 使 $\mu + C(z) > 1$。由此知 C 亦为 z_μ 的开重域，今再就 z_μ 的三种可能情形分别论证。(1) 当 $z = x$ 且 $\mu \leqslant \rho$ 时，此时 $z_\mu \in H$，但 z_μ 又是 H 的聚点，故 x_μ 的重域 C（从而 B）与 H 在异于 $z = x$ 点处相重。(2) 当 $z = x$ 且 $\mu > \rho$。此时 $z_\mu \notin H$。由命题 5·1 的 (3)，有开集 $\widetilde{B}$ 使 $\widetilde{B}(x) = 1-\rho > 1-\mu$，从而 $G = G \cup \widetilde{B}$ 还是 z_μ 的开重域，G 与 H 重于某点 w。因 $G(x) \leqslant \widetilde{B}(x) = 1-\rho = 1-H(x)$，故 $w \neq x$，即 G（从而 C 及 B）与 H 在异于 x 的某点相重。(3) 当 $z \neq x$ 时，由命题 5·1 的 (2)，有 $B^*(z) = (\overline{A})'(z)$。但 $(\overline{A})' = (A')^\circ$（定理 4·2），又注意 $(A')^\circ(z) = B^*(z) \geqslant C(z) > 1-\mu$，有开集 $\widetilde{B} \subset A'$ 且 $\widetilde{B}(z)$ 充分近 $(A')^\circ(z)$ 使 $\widetilde{B}(z) > 1-\mu$，于是 $B \cap \widetilde{B}$ 仍是 z_μ 的开重域，它与 H 相重于某点 w。因 $\widetilde{B} \subset A'$，$\widetilde{B}(x) \leqslant 1 - A(x) = 1 - H(x)$，故 $w \neq x$，即 $B \cap \widetilde{B}$（从而 B）与 H 在异于 x 的某点相重。证毕

6. 分 离 性

定义 6.1 $(X,\mathscr{T})$ 称作不分明准 T_0 空间，若对每点 $x \in X$ 及 $\lambda \neq \mu$，或 $x_\lambda \notin \overline{\{x_\mu\}}$ 或 $x_\mu \notin \overline{\{x_\lambda\}}$

因当 $\mu < \lambda$ 时，$x_\mu \in \overline{\{x_\lambda\}}$，所以 $(X,\mathscr{T})$ 为准 T_0 空间当且仅当对 $x \in X$ 及 $0 < \mu < \lambda \leqslant 1$，有 $x_\lambda \notin \overline{\{x_\mu\}}$。

定义 6·2 $(X,\mathscr{T})$ 称作不分明 T_0 空间，若任意两个不分明点 e 与 d，若 $e \neq d$ 则或 $e \notin \overline{\{d\}}$ 或 $d \notin \overline{\{e\}}$。

定义 6·3 $(X,\mathscr{T})$ 定义称作不分明 T_1 空间，若每个不分明点是闭集。

---

* 四川大学李中夫同志指出这个定理中“每个不分明点的导集为闭集”可削弱，代之以“每个分明点的导集为闭集”。他还给出了这个定理（加强形式）的一个简单证明，参看他的论文 [12]。

显然 T_1 空间是 T_0 空间，T_0 空间是准 T_0 空间。在分明拓扑学中，每个空间都满足准 T_0 条件，所以准 T_0 的分离性是不分明拓扑学中特有的。

设（X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 空间，任取 $x\in X$ 及区间 $\Delta=(\rho_1, \rho_2)$ $(0\leqslant\rho_1<\rho_2<1)$，则有 $\mathscr{T}$ 中开集 B 使 $B(x)\in\Delta$。事实上令 $\lambda=1-\rho_1$，$\mu=1-\rho_2$。有 $\lambda>\mu>0$，由准 T_0 性，$x_\lambda\notin\overline{\{x_\mu\}}$ 即有 x_λ 的某开重域 B（$B(x)>1-\lambda=\rho_1$）与 x_μ 不相重，即 $B(x)\leqslant1-\mu=\rho_2$，故有 $B(x)\in\Delta$。这个准 T_0 空间的性质可增强为

定理 6·1 （X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 的充要条件是对每个 $x\in X$ 及 $\rho\in[0, 1]$，有开集 B 使 $B(x)=\rho$。

证：必要性：当 $\rho=0$ 时，取 $B=\Phi$ 即可。当 $0<\rho\leqslant1$ 时，取正实数严格递增序列 ρ_n 收敛于 ρ。令 $\Delta_n=(\rho_n, \rho_{n+1}]$ $(n=1,2\cdots)$，由方才所论证的性质，有开集 B_n 使 $B_n(x)\in\Delta_n$，那么 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 为开集，且易见 $B(x)=\rho$。充分性：任取不分明点 x_λ 与 x_μ，$\mu<\lambda$，取开集 B 使 $B(x)=1-\mu>1-\lambda$，B 是 x_λ 的开重域且与 $\{x_\mu\}$ 不相重，即 $x_\lambda\notin\overline{\{x_\mu\}}$。

定理 6·2 （X，$\mathscr{T}$）为 T_0 空间的充要条件是（X，$\mathscr{T}$）为准 T_0 且对 X 中任两不同的点 x 与 y 以及任意 ρ，$\nu\in[0, 1)$，有开集 B 使 $B(x)=\rho$ 且 $B(y)>\nu$，或者 $B(x)>\rho$ 且 $B(y)=\nu$。

证：必要性：当（X，$\mathscr{T}$）为 T_0 时自然亦为准 T_0 且对 $x\neq y$ 及 ρ，ν，记 $\lambda=1-\rho$，$\mu=1-\nu>0$，得不分明点 x_λ 与 y_μ。若 $x_\lambda\notin\overline{\{y_\mu\}}$ 有 x_λ 的开重域 B_1（$B_1(x)>1-\lambda=\rho$）与 $\{y_\mu\}$ 不相重，即 $B_1(y)\leqslant1-\mu=\nu$。由准 T_0 性及定理 6·1，有开集 B_2 使 $B_2(y)=\nu$。于是令 $B=B_1\bigcup B_2$ 即可。若 $y_\lambda\notin\overline{\{x_\lambda\}}$ 可类似讨论。充分性：由于准 T_0 性，仅需考察 $x\neq y$ 时，不分明点 x_λ 与 y_μ 分离情形。取 $\rho=1-\lambda$，$\nu=1-\mu$，由题设不妨设有开集 B 使 $B(x)=$ 且 $B(y)>\nu$。那么 B 为 y_μ 的重域且与 $\{x_\lambda\}$ 不相重，即 $y_\mu\notin\overline{\{x_\lambda\}}$

定理 6·3 （X，$\mathscr{T}$）为 T_1 空间的充要条件为对每一 $x\in X$ 及 $\lambda\in[0, 1]$，有开集 B 使 $B(x)=1-\lambda$ 且 B 在其他处取值 1。

证：必要性：当 $\lambda=0$ 时，取 $B=X$，当 $\lambda>0$ 时，x_λ 为不分明点，按题设它为闭集，其补集 B 为开且显然符合要求。充分性：任取不分明点 x_λ，容易检明题给开集 B 满足 $B'=\{x_\lambda\}$，即 x_λ 为闭集。

定义 6·4 （X，$\mathscr{T}$）称作不分明 T_2 空间（Hausdorff 空间），若对承点不同的任意两个不分明点 e 与 d，存在各自的重域 B 与 C 使 $B\bigcap C=\Phi$。

命题 6·1 设（X，$\mathscr{T}$）为 T_2 空间，$A=\{y_\mu\}$，则 A 的任一聚点必作 y_λ $(\lambda>\mu)$ 型。

证：当 $\lambda\leqslant\mu$ 时，$y_\lambda\in A$，而 y_λ 的任一重域与 A 至多只能重于 y 点，故 y_λ 不是 A 的聚点。当 $x\neq y$，由 T_2 性，点 x_λ 有重域 B 与 y_μ 某重域 B_1 不相交，但 $B_1(y)>1-\mu\geqslant0$，从而 $B(y)=0$，即 B 与 A 不相重，x_λ 也不能是 A 的聚点。故 A 的聚点只能作 y_λ $(\lambda>\mu)$ 型。

由于 T_2 空间只讨论承点不同的不分明点的分离问题，故如下例所示，T_2 空间可能不是准 T_0 的，从而更不是 T_1 的。

例 设 X 由不相同的点 y 与 z 组成。拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\{y_\lambda|\lambda\in(\frac{1}{2}, 1]\}$ 及 $\{z_\lambda|\lambda\in(0, 1]\}$ 及 Φ 为基。易见（X，$\mathscr{T}$）为 T_2 空间，但 $\mathscr{T}$ 中无开集在 y 点取值 $\frac{1}{2}$。由定理 6·1，它不是准

T_0 空间。

定理 6·4 （X，$\mathscr{T}$）若是 T_2 与准 T_0 的，则也是 T_1 的。

证： 任取点 y_μ，由命题 6·1，$\{y_\mu\}$ 的聚点只能 $y_\lambda(\lambda>\mu)$ 型，但由准 T_0 性及定理 5·1，有开集 B 使 $B(y)=1-\mu>1-\lambda$，即 B 为 y_λ 的重域且与 $\{y_\mu\}$ 不相重，故 $y_\lambda(\lambda>\mu)$ 也不能是 $\{y_\mu\}$ 的聚点。即 $\{y_\mu\}$ 是没的有聚点，由定理 5·1 的系，$\{y_\mu\}$ 为闭集，所以（X，$\mathscr{T}$）为 T_1 空间。

由于 T_1 空间中每个不分明点的导集显然为 Φ，由定理 5·2 有

定理 6·5 在 T_1 空间中，每个不分明集的导集为闭集。

7. Ω聚点，Lindelöf 性质

定义 7·1 X 上不分明集 A 称作不可数集，若 Supp A 为 X 的不可数分明集。

命题 7·1 在 C_{II} 空间中，任一不可数集必含有它的不可数个承点两两不同的不可数个聚点，这个命题是下面定理 7·1的系。

定义 7·2 不分明点 e 称作集 A 的 $Ω$ 聚点，若 e 的每个重域与 A 相重的点所构成的集之势皆为不可数。

定义 7·3 （X，$\mathscr{T}$）中不分明集 D 称作具有 Lindelöf 性质的，若 D 的每个开集族形成的复盖(即开复盖)都有可数的子复盖。若(X,$\mathscr{T}$)中每个不分明集都具有 Lindelöf 性质，则称它为遗传 Lindelöf 空间。如果（X，$\mathscr{T}$）中集 X 具有 Lindelöf 性质，则称它为 Lindelöf 空间。

命题 7·2 C_{II} 空间是遗传 Lindelöf 空间。

证明可仿照［10］页 49 定理 15 之证。

定理 7·1 设（X，$\mathscr{T}$）为遗传 Lindelöf 空间，A 为 X 上不分明集，属于 A 自身的 A 的 Ω 聚点全体的并记作 B，那么 $X_1=\text{Supp}\,A-\text{Supp}\,B$ 为 X 中可数分明集。

证： 若 X_1 为非空集，任取 $y\in X_1$。记 $\lambda=A(y)>0$。不分明点 $y_\lambda\in A$。因 $y\notin\text{Supp}\,B$，y_λ 不是 A 的 Ω 聚点。于是 y_λ 的某开重域 B_y 与 A 相重的点至多为可数，即使 $B_y(z)>1-A(Q)$的点 z 至多为可数个。现在记 $\mathscr{B}=\{B_y\mid y\in X_1\}$，$D$ 为在 $y\in X_1$ 处取值 $B_y(y)$，在 X_1 外取零值的不分明集。显然 $\mathscr{B}$ 为 D 的开复盖。因 D 有 Lindelöf 性质，故有可数个 $B_{y_i}\in\mathscr{B}$，$i=1$，2，…使 $W=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{y_i}\supset D$。显然使 $W(z)>1-A(z)$成立的点 z 也至多可数。另一方面对每个 $y\in X_1$，有 $W(y)\geqslant D(y)$，B_y 又是 y_λ的重域，即 $B_y(y)>1-\lambda=1-A(y)$，所以 $W(y)>1-A(y)$，所以 X_1 至多为可数。

8. 子 空 间

定义 8·1 设（X，$\mathscr{T}$）为不分明拓扑空间，Y 为X 的分明子集，那么 $\mathscr{T}$ 中诸不分明集在 Y 上限制显然给出一个以 Y 为承载集的不分明拓扑 $\mathscr{U}$，称作 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的相对拓扑，空间（Y，$\mathscr{U}$）称作（X，$\mathscr{T}$）的子空间。$\mathscr{U}$ 中开集（闭集）也称作 Y 上相对开集（闭集）。

由于空间与子空间在讨论中常常同时出现，为表述简洁，在不发生混淆情形下，采取以

下约定：(1) 子空间 (Y，$\mathscr{U}$) 常不明确说出其相对拓扑，而简单地说子空间 Y。(2) Y 上不分明集 A 自动地理解作 X 上不分明集，这意味着 A 在 $X-Y$ 上取零值。反之，X 中不分明集若在 $X-Y$ 上取零值，也可看作 Y 上不分明集。(3) 对于子空间 (Y，$\mathscr{U}$) 中不分明集 A，A 在 $\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{T}$ 下的闭包常常分别记作 $\mathrm{cl}_Y A$ 与 $\mathrm{cl}_X A$。

命题 8·1. 设 (Y，$\mathscr{U}$) 为 (X，$\mathscr{T}$) 的子空间，A 为 Y 上不分明集，则

(1) A 为 $\mathscr{U}$ 中闭集当且仅当 A 为 $\mathscr{T}$ 中某闭集 B 在 Y 上限制。

(2) Y 上不分明点 y_λ 为集 A 在 $\mathscr{U}$ 拓扑下聚点当且仅当 y_λ 是集 A 在 $\mathscr{T}$ 拓扑下聚点。

(3) $\mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}_X A$.

证：(1) 用取补集方法，由相对拓扑定义即得。(2) 因 y_λ 在 $\mathscr{U}$ 中重域系即是 y_λ 在 X 上重域系在 Y 限制给出的。A 又是 Y 上不分明集，由聚点定义即可直接验证。(3) 这由 (2) 及定理 5·1 及导集的定义即得。

9. 隔 离 性

定义 9·1 (X，$\mathscr{T}$) 中集 A_1 与 A_2 称作隔离的，若有开集 $U_i \supset A_i$ ($i=1,2$) 使 $U_1 \cap A_2 = \Phi = U_2 \cap A_1$.

定义 9·1′ (X，$\mathscr{T}$) 中集 A_1 与 A_2 称作 Q—隔离的，若有闭集 $H_i \supset A_i$ ($i=12$)，使 $H_1 \cap A_2 = \Phi = H_2 \cap A_1$. 显然 A_1 与 A_2 为 Q—隔离的充要条件为 $\overline{A}_1 \cap A_2 = \Phi = \overline{A}_2 \cap A_1$.

命题 9·1 隔离性与 Q—隔离性是不相蕴涵的。

这由下例即明

例 1. 设 $X = X_1 \cup X_2$，X_1 与 X_2 为非空分明集且不相交。记在 X_i 上取常数 λ_i ($i=1,2$) 的不分明集为 $[\lambda_1, \lambda_2]$. (1) 取拓扑 $\mathscr{T}_1$ 以 X，Φ，及 $\left[\frac{2}{3}, 0\right]$，$\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 为基，又令 $A_1 = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$，$A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$，那么 A_1 与 A_2 在 $\mathscr{T}_1$ 中是隔离的. 但 $\overline{A}_1 = \left[1, \frac{1}{3}\right]$ 与 A_2 相交，即 A_1 与 A_2 不是 Q—隔离的。(2) 取 $\mathscr{T}_2$ 由 X，Φ 及 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. $\left[1, \frac{1}{2}\right]$ 为基，那么在 $\mathscr{T}_2$ 中，A_1 与 A_2 本身是闭集且不相交，自然为 Q—隔离，但却显然不是隔离的。

隔离与 Q－隔离在分明拓扑学中重而为一，而且我们还有

命题 9·2 设 D_1 与 D_2 是不分明拓扑空间 (X，$\mathscr{T}$) 中分明集，则 D_1 与 D_2 为隔离的充要条件是 D_1 与 D_2 为 Q－隔离。

证 设 D_1 与 D_2 为 Q－隔离，即有不分明闭集 $H_i \supset D_i$ 且 $H_i \cap D_j = \Phi$ ($j \neq i$，$i, j = 1, 2$)。所以 H_i 为在 X 的子集 D_i 上取常值 1，在 D_j 上取常值零的不分明集，从而 $H_i{}' = G_i$ 在 D_i 上取常值零，在 D_j 上取常值 1，即 $G_i \supset D_j$ 且 $G_i \cap D_i = \Phi$，所以 D_1 与 D_2 是隔离的。反之，只要把上述论证开集与闭集两词对换，即可由 D_1 与 D_2 的隔离性推知它们的 Q—隔离性。

以下把 $\mathrm{Supp}\,A$ 简记作 A_0。

定理 9·1 不分明集 A 与 B 为 Q－隔离的充要条件为 $A_0 \cap B_0 = \phi$，$\mathrm{cl}_{A_0 \cup B_0} A = \mathrm{cl}_{A_0}$

A，$\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}B=\mathrm{cl}_{B_0}B$

证： 必要性：设 A 与 B 为 Q－隔离的，则 $B\cap \mathrm{cl}_X A=\Phi$，自然 $A_0\cap B_0=\phi$、且 $B_0\cap \mathrm{cl}_X A=\Phi$，由命题 8·1 的（3） 有 $\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A=(A_0\cup B_0)\cap \mathrm{Cl}_X A=\mathrm{Cl}_{A_0}A$。类似可证 $\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}B=\mathrm{cl}_{B_0}B$。充分性：在题设条件下，由命题8·1，有

$$B\cap \mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A=B\cap \mathrm{cl}_{A_0}A\subset B_0\cap A_0=\Phi$$

从而 $B\cap \mathrm{cl}_X A=B\cap(B_0\cup A_0)\cap \mathrm{cl}_X A=B\cap \mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A=\Phi$，类似地，$A\cap \mathrm{cl}_X B=\Phi$。即 A 与 B 为 Q－隔离。

命题 9·3 不分明集 A 与 B 为 Q－隔离充要条件是 $\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A$ 与 $\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}B$ 为 Q－隔离。

证： 充分性显然成立。今证必要性。记 $C=\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A$，$D=\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}B$。由定理 9·1，有 $C=\mathrm{cl}_{A_0}A$，$D=\mathrm{cl}_{B_0}B$，从而 $C_0=A_0$，$C_0=B_0$。于是 $C_0\cap D_0=\phi$。同时 $\mathrm{cl}_{C_0}C\subseteq \mathrm{cl}_{C_0\cup D_0}C=\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}(\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A)=\mathrm{cl}_{A_0\cup B_0}A=\mathrm{cl}_{A_0}A=\mathrm{cl}_{C_0}A\subset \mathrm{cl}_{C_0}C$，即 $\mathrm{cl}_{C_0}C=\mathrm{cl}_{C_0\cup B_0}C$。类似地有 $\mathrm{cl}_{D_0}D=\mathrm{cl}_{C_0\cup D_0}D$。又由定理 9·1，$C$ 与 D 为 Q 隔离。

定义 9·2 设 A 与 B 为 X 上不分明集，$A\sim B$ 代表 X 上不分明集，它在 $A(x)>B(x)$ 的点 x 处取值 $A(x)$，在其余处取值零。

上述运算～在分明拓扑学中显然就是集的差。在分明拓扑学中，有如此较明显的定理：当 Y 与 Z 同时是分明拓扑空间 X 中开集（或闭集）时，$Y-Z$ 与 $Z-Y$ 在 X 中是隔离的（［10］页 52 定理 17）。这个结果在不分明拓扑学中如下例可见已不成立。这也是［10］章 I 中完全不能移植于不分明拓扑学的唯一定理。

例 2. $X=X_1\cup X_2$ 及 X 上不分明集 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 如本节例 1. 取拓扑 $\mathscr{T}=\left\{[\lambda,\mu]\,\middle|\,\lambda,\mu\leqslant\frac{1}{2}\right\}\cup X$。 命 $Y=\left[\frac{2}{3},1\right]$，$Z=\left[1,\frac{2}{3}\right]$，那么 Y 与 Z 是 $\mathscr{T}$ 中闭集。但 $Y\sim Z=[0,1]$，$Z\sim Y=[1,0]$ 却不是隔离的（因包含 $Y\sim Z$ 的开集是唯一的即是 X），也不是 Q－隔离的（因 $\overline{(Y\sim Z)}=\left[\frac{1}{2},1\right]$ 与 $Z\sim Y$ 的交不是 Φ，）

命题 9·4 设 A 与 B 是 X 上不分明集且 $A\cup B=X$，则 $A\sim B$ 与 $B\sim A$ 是 X 上分明集，从而（由于命题 9·2）对 $A\sim B$ 与 $B\sim A$ 而言，隔离与 Q－隔离是一致的。

证： 设 $A\sim B$ 在 $x\in X$ 处取非零值，由 $A\sim B$ 的定义，有 $A(x)>B(x)$。但 $\max(A(x),B(x))=1$，从而 $A(x)=1=(A\sim B)(x)$，所以 $A\sim B$ 仅取零值或值1· 类似可证 $B\sim A$ 为分明集。

定理 9·2 设 A，B，D 为（X，$\mathscr{T}$）中不分明集，$A\cup B=X$ 且 $A\sim B$ 与 $B\sim A$ 为 Q－隔离（或隔离），则 $\mathrm{cl}_X D=\mathrm{cl}_{A_0}(D\cap A)\cup \mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$

证： 由命题 9·4，仅需讨论 $A\sim B$ 与 $B\sim A$ 为 Q－隔离情形。

易见 $\mathrm{cl}_X D \supset \mathrm{cl}_{A_0}(D\cap A)\cup \mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$。今证相反的包含关系。由 $A\cup B=X$，有 $A\cup(B\sim A)=X$。于是 $D=(D\cap A)\cup(D\cap(B\sim A))$，$A\cap \mathrm{cl}_X D=(A\cap \mathrm{cl}_X(D\cap A))\cup(A\cap \mathrm{cl}_X(D\cap(B\sim A))$，最后式子第一项显然包含于 $A_0\cap \mathrm{cl}_X(D\cap A)=\mathrm{cl}_{X_0}(D\cap A)$；至于第二项将证明包含于 $\mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$。事实上由于 $\mathrm{cl}_X(B\sim A)$ 与 $A\sim B$ 不相交，即对 $A(x)>B(x)$ 的点 x，$\mathrm{cl}_X(B\sim A)$ 取零值，所以它仅在 $B(x)\geqslant A(x)$ 的点 x 处才可取非零值，但当 $B(x)\geqslant A(x)$ 时易见 $B(x)=1$（因 $A\cup B=X$），亦即 $\mathrm{cl}_X(B\sim A)$ 仅在 $B(x)=1$ 的点 x 处才可能取非零值，$\mathrm{cl}_X(B\sim A)\subset B_0$，从而

$$\mathrm{cl}_X(D\cap(B\sim A))\subset \mathrm{cl}_X(D\cap B)\cap B_1=\mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B),$$

于是 $A\cap \mathrm{cl}_X D\subset \mathrm{cl}_{A_0}(D\cap A)\cup \mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$。类似地可证

$B\cap \mathrm{cl}_X D\subset \mathrm{c}_{A_0}(D\cap A)\cup \mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$，从而有

$\mathrm{cl}_X D=(A\cap \mathrm{cl}_X D)\cup(B\cap \mathrm{cl}_X D)\subset \mathrm{cl}_{A_0}(D\cap A)\cup \mathrm{cl}_{B_0}(D\cap B)$。

定理 9·3 设 A,B,D 为 $(X,\mathscr{T})$ 中不分明集，$A\cup B=X$，$A\sim B$ 与 $B\sim A$ 为 Q-隔离或隔离的，又设 $D\cap A$ 与 $D\cap B$ 分别是子空间 A_0 与 B_0 中相对闭集（或开集）。则 D 为 X 上闭集（或开集）。

证：关于闭集情形，由定理 9·2 即得，关于开集情形，由于在不分明拓扑中补集性质已有较大变化（指 $A\cap A'$ 未必为 Φ），难以从闭集情形取补后给出，下面给出一个颇具格论色彩的证明。记 $X_1=\{x|B(x)=0\}$，$X_2=\{x|1=A(x)>B(x)>0\}$，$X_3=\{x|1=B(x)=A(x)\}$，$X_4=\{x|1=B(x)>A(x)>0\}$ 及 $X_5=\{x|A(x)=0\}$。由于 $A\cup B=X$，$A(x)$ 与 $B(x)$ 中至少一个为 1，易见 $X=\bigcup_{i=1}^{5}X_i$ 且由它们定义式，易见诸 X_i 两两不相交（X_i 中允许有空集）。设 f 为 X 上不分明集，f 在 X_i 上限制记为 f_i，那么 f 也可用 (f_1,f_2,f_3,f_4,f_5) 来表示。又在 X_i 上取常值 0 或 1 的不分明值，在上述表示式中，我们就将第 i 个分量径以 0 或 1 表之，现在由 X_i 定义，易见 $A=(1,1,1,a,0)$，$B=(0,b,1,1,1)$，这里 a 为 A 在 X_4 上限制，b 为 B 在 X_2 上限制（a 与 b 未必是常数）。又设 $D=(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)$，从而 $D\cap A=(d_1,d_2,d_3,a\cap d_4,0)$，$D\cap B=(0,d_2\cap b,d_3,d_4,d_5,)$。由题设 $D\cap A$ 与 $D\cap B$ 分别是 $A_0=X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4$ 与 $B_0=X_2\cup X_3\cup X_4\cup X_5$ 上的相对开集，故有 X 上开集 V_1 与 V_2 使 $V_1\cap A_0=D\cap A$，$V_2\cap B_0=D\cap B$。记 V_1 在 X_5 上限制为 g，V_2 在 X_1 上限制为 h，那么有 $V_1=(d_1,d_2,d_3,a\cap d_1,g)V_2=(h,b\cap d_2,d_3,d_4,d_5)$，另一方面，由命题 9·4，不妨设 $A\sim B$ 与 $B\sim A$ 为隔离的，从而有 X 上开集 $G_1\supset A\sim B$，$G_2\supset B\sim A$ 使 $G_1\cap(B\sim A)=\Phi=G_2\cap(A\sim B)$，但易见 $A\sim B=(1,1,0,0,0)$，$B\sim A=(0,0,0,1,1)$，于是有 $G_1=(1,1,s,0,0)$ 及 $G_2=(0,0,t,1,1)$。这样问题就化为已知 X 上开集 V_1，V_2，G_1 及 G_2 如上述形式，要将 D 经过这些集的适当交与并表示出来的一个颇具格论色彩的问题。我们有 $V=V_1\cup V_2=(d_1\cup h,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5\cup g)$，$F_1=G_1\cup V_2=(1,1,s\cup d_3,\ d_4,\ d_5)$，$F_2=G_2\cup V_1=(d_1,\ d_2\ t\cup d_3,\ 1,\ 1)$，$F_1\cap F_2=(d_1,d_2,d_3\cup(s\cap),d_4,\ d_5)$ 最后有

$$(F_1\cap F_2)\cap V=(d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5)=D$$

证毕。显然，只要将开集换成闭集，隔离换成 Q-隔离，上述论证对闭集情形下也有效。

10. 连 通 性

定义 10·1 $(X, \mathscr{T})$中不分明集D称作不连通的，若在子空间D_0(即supp D)中，有非Φ集A与B为Q－隔离且$D=A\cup B$. 不是不连通集称作连通集。

引理 10·1 D为不连通的充要条件是在子空间D_0中有相对闭集A与B使$A\cap D\neq\Phi$，$B\cap D\neq\Phi$，$A\cap B=\Phi$及$A\cup B\supset D$.

证：必要性由$D_0=A_0\cup B_0$及命题9·3即得。今证充分性。对题示的闭集A与B，令$\widetilde{A}=A\cap D$，$\widetilde{B}=B\cap D$，易见$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=(A\cup B)\cap D=D$，$\widetilde{A}\neq\Phi$，$\widetilde{B}\neq\Phi$，且由于$\widetilde{A}\subset A$，$\widetilde{B}\subset B$，由$A$与$B$在$D_0$子空中$Q$－隔离（这是显然的），即得$\widetilde{A}$与$\widetilde{B}$也在$D_0$中为$Q$－隔离。

定理 10·1 设D为$(X, \mathscr{T})$中连通集，则$\mathrm{cl}_X D$与$\mathrm{cl}_{D_0}D$亦是连通的。

证：设 $\mathrm{cl}_X D=E$是不连通的，由引理10·1，有E_0上相对闭集A与B使$A\cup B\supset E$，$A\cap E\neq\Phi$，$B\cap E\neq\Phi$，$A\cap B=\Phi$. 显然$A\cup B\supset D$，由D连通性，不妨设$A\cap D=\Phi$($B\cap D=\Phi$情形可类似讨论)，即$D\subset B$，从而$E=E\cap E_0=\mathrm{cl}_X D\cap E_0=\mathrm{cl}_{E_0}D\subset\mathrm{cl}_{E_0}B=B$，但$A\cap B=\Phi$，所以$A\cap E=\Phi$，矛盾。至于$\mathrm{cl}_{D_0}D$的连通性可类似地予以反证（只要把上述$E$理解作$\mathrm{cl}_{D_0}D$，注意并在此时有$E_0=(\mathrm{cl}_{D_0}D)_0=D_0$即可。

定理 10·2 设有$(X, \mathscr{T})$中连通集族$\mathscr{A}$，其中任意两个集在子空间$(\bigcup\mathscr{A})_0$上不是Q－隔离的，则$\bigcup\mathscr{A}=D$是连通的。

证：设D不连通，则有D_0上相对闭集A与B使$A\cup B\supset D$，$A\cap D\neq\Phi$，$B\cap D\neq\Phi$，$A\cap B=\Phi$今任取$\mathscr{A}$中一集H，由H连通性及$A\cup B\supset H$，不妨设$A\cap H=\Phi$($H\cap B=\Phi$情形可类似讨论)，即$H\subset B$，故$\mathscr{A}$中任一集或包含于A或包含于B。又由$A\cap D\neq\Phi$与$B\cap D\neq\Phi$，可设$\mathscr{A}$中集H_1与H_2使$H_1\subset A$，$H_2\subset B$，由于$\mathrm{cl}_{D_0}H_1\subset\mathrm{cl}_{D_0}A=A$及$\mathrm{cl}_{D_0}H_2\subset B$，易见$H_1$与$H_2$在$D_0$上为$Q$－隔离，矛盾。

定义 10·2 设D为$(X, \mathscr{T})$中不分明集，包含于D中极大连通集称作D的一个连通区。

定理 10·3. 设D为$(X, \mathscr{T})$中不分明集，每个包含于D中的连通集必包含于D的某连通区中，D的任意两个不同的连通区在D_0中是Q－隔离的。

证：定理后半是定理10.2与连通区的极大性的直接推论。今证定理前半。在$D=\Phi$时，情形是平凡的。设$D\neq\Phi$，A为含于D中的一个连通集，先设$A\neq\Phi$. 记所有包含于D中且又包含A的连通集的集族为$\mathscr{B}$，由于$\mathscr{B}$中任两个集都含非Φ集A，自然不是Q－隔离的。由定理11.2，$\bigcup\mathscr{B}=E$是连通的，易见E为D的一个连通区。至于$A=\Phi$情形，因$D\neq\Phi$，任取不分明点$e\in D$，由连通集定义，易验明集e是连通的。由方才所证，e从而Φ包含于D某个的连通区中。

与分明扑拓学不同，不分明集D的连通区未必是D_0上相对闭集，

例 X为单点x组成。$\mathscr{T}=\{X, \Phi, x_{\frac{1}{2}}\}$. 取$D=\{x_{\frac{1}{3}}\}$，那么$D$自然是$D$的连通区但不是$D_0=X$中闭集。

命题 10·1 当 D 为（X，$\mathscr{T}$）中闭集时，D 的每个连通区是 X 上的闭集。

证：设 A 为 D 的某连通区。由 $\mathrm{cl}_X A \subset \mathrm{cl}_X D = D$ 及定理 10·1，$\mathrm{cl}_X A$ 是连通集又含于 D 中，从而由连通区极大性，有 $A = \mathrm{cl}_X A$，A 为 X 上闭集，

在本节最后，我们指出隔离集定理（[10] 页 60 问题 1.Q）是可以推广至不分明拓扑空间的，其证明虽然长但是直接的，留给读者：

定理 10·4（隔离集定理）。设 A 与 B 为$(X,\mathscr{T})$中连通集且 $A \supset B$.又设 $A \sim B = C \cup D$，C 与 D 在 X 上是 Q－隔离的，那么$B \cup C$ 与 $B \cup D$ 是连通集。

11. 不分明网（net）

从本节起，我们转向不分明拓扑空间中 Moore-Smith 式收敛的研究。[10] 第二章的所有定理都可以推广到不分明拓扑学中

定义 11·1 设 D 为非空集，$\geqslant$是 D 上一个半序，若对 D 任意 m 与 n，必有 D 中 P 使 $p \geqslant m$，$p \geqslant n$，则称（D，$\geqslant$）为由半序$\geqslant$定向的定向集。

定义 11·2 设（D，$\geqslant$）为定向集，X 为分明集，$\mathscr{P}$ 为 X 上不分明点全体形成的集。由 D 至$\mathscr{P}$的函数 S 称作 X 上的不分明网。对 $n \in D$，$S(n)$ 也常记作 S_n，于是网 S 也常表示作 $\{S_n, n \in D\}$。D 称作网 S 的定义域。

定义 11·3 设 $S = \{S_n, n \in D\}$ 为 X 上不分明网，A 为 X 上不分明集。若对所有 n，S_n皆重于 A，则称网 S 重于 A。若有 $m \in D$，使当 $n \geqslant m$ 时，S_n 皆重于 A，则称网 S 最终重于 A。若对 D 中任意 m，都有 D 中 $n \geqslant m$ 使 S_n 重于 A，则称网 S 常常重于 A。若每个 $S_n \in A$，则称网 S 在 A 中。

定义 11·4 设 S 为 X 上不分明网，e 为 X 上不分明点。在（X，$\mathscr{T}$）中对 e 的每个重域 B，网 S 最终重于 B，则称（在拓扑 $\mathscr{T}$ 下）网 S 收敛于 e。

定理 11·1 在（X，$\mathscr{T}$）中，不分明点 $e \in \overline{A}$的充要条件是存在网 S 在 A 中且收敛于点 e。

证：必要性：e 的所有重域以包含关系为半序显然成为一定向集(命题 2·2 中条件(2))，记作 D，对 D 中每个重域 B，因 $e \in \overline{A}$，B 与 A 重于某点 z，$B(z)+A(z)>1$，所以 $A(z)=\mu>0$，不分明点 $z_\mu \in A$ 且重于 B。现在对 $B \in D$，对应不分明点 z_μ，这个对应给出网显然符合要求。充分性：设 $S=\{S_n, n \in D\}$ 在 A 中且收敛于 e，那么对 e 的任一重域，B，因 S 最终重于 B，有某 $S_n = z_\mu$ 重于 B 且 $z_\mu \in A$，即 $B(z)+\mu>1$ 且 $\mu \leqslant A(z)$，从而 $B(z)+A(z)>1$ 即 B 与 A 相重，由定理 4·1′，$e \in \overline{A}$。

定理 11·2 设 A 为（X，$\mathscr{T}$）中不分明集，A 为闭集的充要条件为A中每个不分明网 S 不会收敛于不属于 A 的不分明点。

注意 A 为闭集当且仅当 $\overline{A}=A$，本定理是定理 11·1 的直接推论。

在定义 9·2 中作为分明拓扑学中集的差的推广，引入了运算 $A \sim B$。现在我们给出另一种推广。

定义 11·4 设 A 与 B 为 X 上不分明集，$A - B$ 表示 X 上一个不分明集，它在满足 $A(x) \geqslant B(x) > 0$ 处取零值，在其他处与 A 同值，直观地说，对 $x \in X$，当不分明点$x_{B(x)}$存

在（即 $B(x)>0$）且属于 A 即 $A(x)\geqslant B(x)$ 时，则在 x 处 A 的值被减为零，在其他情形下不变。

显然当$A(x)<\lambda$时，$A-\{x_\lambda\}=A$；当$A(x)\geqslant\lambda$时，有$\mathrm{Supp}(A-\{x_\lambda\})=\mathrm{Supp}\,A-x$。

定理 11•3 在（X，$\mathscr{T}$）中，x_λ 为 A 的聚点的充要条件为存在 $A-\{x_\lambda\}$ 中一个分明网收敛于 x_λ。

证：当 $A(x)<\lambda$ 时，$A-\{x_\lambda\}=A$ 且 $x_\lambda\notin A$，所以 x_λ 为 A 的聚点当且仅当$x_\lambda\in\overline{A}$。由定理 11•1，这又等价于有 $A=A-\{x_\lambda\}$ 中网收敛于 x_λ。本定理成立。当 $A(x)\geqslant\lambda$ 时，有 $x_\lambda\in A$，此时 x_λ 为 A 的聚点的充要条件为 x_λ 的每个重域 B 与 A 在异于点 x 处相重，即 B 与不分明集 $H=A-\{x_\lambda\}$ 相重，换句话，x_λ 为 A 聚点当且仅当 $x_\lambda\in\overline{H}$。由定理 11•1，这等价于 H 中有网收敛于 x_λ。证毕。

12. 网的收敛点的唯一性，累次极限定理

如下面命题所见，网的收敛点一般都是无穷多的，但是对承点加以限制，可得出一适当的唯一性结果。

命题 12•1 设（X，$\mathscr{T}$）中网 S 收敛于点 x_λ，则对 $0<\mu\leqslant\lambda$，网 S 也收敛于 x_μ。

证：由 $\mu\leqslant\lambda$，有 $1-\mu\geqslant1-\lambda$，故 x_μ 的任一重域也必是 x_λ 的重域，由此易知 S 也必收敛于 x_μ。

定义 12•1 设对每个 $\alpha\in I$，（D_α，$>_\alpha$）是定向集。诸 D_α 的乘积 $D\equiv\times\{D_\alpha|\alpha\in I\}$ 中成员 d 可看作定义于 I 上函数使对 $\alpha\in I$，$d(\alpha)\in D_\alpha$。所谓 D 上乘积半序 $>$ 定义为：对 D 中成员 d 与 f，$d>f$ 当且仅当对每个 $\alpha\in I$，在 D_α 中 $d(\alpha)>_\alpha f(\alpha)$。所谓诸（$D_\alpha$，$>_\alpha$）的乘积定向集即指（$D$，$>$）。（易验明半序$>$确定向了集 D）。

定理 12•1 在（X，$\mathscr{T}$）中，每个网都不会同时收敛于两个承点不同的不分明点的充要条件是（X，$\mathscr{T}$）为不分明 T_2 空间。

证：若 X 上的网 $S=\{S_n, n\in D\}$ 同时收敛于承点不同的不分明点 e_1 与 e_2，任取 e_i 的重域 B_i（$i=1,2$），由网收敛定义，有某 S_m 即重于 B_1 又重于 B_2，记 $\mathrm{Supp}(S_m)=z$，显然 $B_1(z)>0$，$B_2(z)>0$，从而 B_1 与 B_2 相交，这与（X，$\mathscr{T}$）为 T_2 空间假设矛盾。这就证明了充分性。今证必要性。若（X，$\mathscr{T}$）不是 T_2 空间，则有承点不同的不分明点 e_1与 e_2。对 e_i 的任意重域$A_i=(i=1,2)$，A_1与A_2 总是相交的，从而有$z\in X$，使$A_1(z)>0$，$A_2(z)>0$。记 $\lambda=\min(A_1(z),A_2(z))$ 则点 $z_{1-\lambda/2}$ 即重于 A_1 又重于 A_2。这个不分明点记作$S(A_1$，$A_2)$。记 e_i 的重域系由包含关系定向所成的定向集为 $\varnothing_i(i=1,2)$，乘积定向集$\varnothing_1\times\varnothing_2$为 $\varnothing$。对 $\varnothing$ 中任一成员 $A_1\times A_2$，（$A_i\in\varnothing_i$），对应上述不分明点 $S(A_1, A_2)$。这个对应给出 X 上一个不分明网 S。易见 S 同时收敛于承点不同的 e_1 与 e_2，矛盾。

下面网收敛的累此极限定理在数学分析中有其自身的兴趣，在这里给出的一般形式也是为了下面 § 14 中关于收敛与拓扑的关系研究作准备。

定义 12•2 设 D 为定向集，对每个 $m\in D$，E_m 也是定向集。若对每个 $m\in D$ 及$n\in E_m$，都对应一个不分明点 S（m，n），这个对应 S 称作 X 上累次不分明网。假若在（X，$\mathscr{T}$）中

对给定的 m，不分明网 $\{S(m, n), n\in E_n\}$ 收敛于 X 上某不分明点 S_m，从而得到网 $\{S_m, m\in D\}$，又假定它收敛于 X 上某不分明点 e，则称累次不分明网 S 的累次极限存在，或等价地说作 S 收敛于点 e。

定理 12·2 （累次极限定理）。设在（X，$\mathscr{T}$）中累次不分明网 $S=\{S(m, n)\}$ 如定义 12·2所给且收敛于点 e。记乘积定向集 $D\times(\times\{E_m|m\in D\})$ 为 F，对 F 的每个成员 (m,f)，由 $R(m, f)=(m, f(m))$ 定义了 F 上一个函数 R，那么 R 与 S 的合成 SoR 给出了以 F 为定义域的不分明网，且 SoR 也收敛于点 e。

证： SoR 显然是以 F 为定义域的不分明网。对 e 的任意重域 B，由于 S 收敛于 e，如定义 12·2 所表记，有某 $m\in D$ 使对 D 中 $p\geqslant m$，S_P 皆重于 B。记 S_P 的承点为 x_P，那么 $B(x_P)+S_P(x_P)>1$，所以 B 亦是 S_P 开重域，于是由网 $\{S(p, n), n\in E_P\}$ 收敛于 S_P 的假设（定义 12·2），可对应 $-f(p)\in E_P$，使在 E_P 中当 $n\geqslant f(p)$ 时，有 $S(p, n)$ 重于 B。这样对于 $p\geqslant m$，都如上定义了 $f(p)\in E_P$ 对于其余的 P，随便取某 $f(p)\in E_P$，从而给出 $f\in\times\{E_P, P\in D\}$ 及 $(m, f)\in F$。在定向集 F 中，当 $(p, g)\geqslant(m, f)$ 时，有 $p\geqslant m$，$g(p)\geqslant f(p)$。由上述选取法，知 $S(p, g(p))$ 重于 B，从而，$SoR(p, g)=S(p, g(p))$ 重于 B，亦即 SoR 最终重于 B，故不分明网 SoR 收敛于点 e。

13. 子网，子序列

定义 13·1 X 上不分明网 $T=\{T_m, m\in E\}$ 称作 X 上不分明网 $S=\{S_n, n\in D\}$ 的子网（Subnet），若有到 E 至 D 的函数 N 满足。

(1) $T=S\circ N$，即对每个 $i\in E$　　$T_i=S_{N(i)}$

(2) 对 D 中每个 n，有 E 中集 m 使在 E 中当 $p\geqslant m$ 时，有 $N(P)\geqslant n$。

定理 13·1 设 $S=\{S_n, n\in D\}$ 为 X 上不分明网，$\mathscr{A}$ 为 X 上不分明集族，使 $\mathscr{A}$ 中任意两个集的交包含有 $\mathscr{A}$ 中一个集。又设 S 常常重于 $\mathscr{A}$ 中每个集，则 S 有子网 T，T 最终重于 $\mathscr{A}$ 中每个集。

证： 由题设，集族 $\mathscr{A}$ 由包含关系所定向，这个定向集记作 D_1，命 E 为所有偶对 (m,A) 的集，这里 $m\in D$，$A\in D_1$ 并且要求 S_m 重于 A。显然 E 是 $D\times D_1$ 中子集，$D\times D_1$ 的乘积半序在 E 上限制给出 E 上一个半序$\geqslant$。E 由这个半序所定向。事实上，对 E 中成员 (m,A) 与 (n,B)，有 $\mathscr{A}$ 中集 G 含于 $A\cap B$。又因 S 常常重于 G，又有 $p\in D$ 使 $p\geqslant m$，$p\geqslant n$ 且 S_P 重于 G，于是 $(P, G)\in E$ 且在半序$\geqslant$中位于 (m, A) 与 (n, B) 之后。今对定向集 $(E, \geqslant)$ 命 $N(m, A)=m$ 定义一函数 $N: E\to D$。易见 N 满足定义 13·1 中条件 (2)，从而 $T=SoN$，是 S 的一个子网，而且任取 $\mathscr{A}$ 中集 A，可对应 $m\in D$ 使 S_m 重于 A，于是 $(m, A)\in E$ 并且在 E 中当 $(n, B)\geqslant(m, A)$ 时 $T(n, B)=S\circ N(n, B)=S_n$ 重于 B 从而也重于 A，即 T 最终重于 A。所以子网 T 符合要求。

定义 13·2（X，$\mathscr{T}$）中不分明点 e 称作网 S 的聚点，若对于 e 的每个重域 B，S 常常重于 B。

定理 13·2 （X，$\mathscr{T}$）中点 e 为网 S 的聚点的充要条件是 S 有一子网 T 收敛于点 e。

证： 充分性是定义 13·2 与定义 13·1 的直接推论。由于 e 的重域系满足定理 13·1 中关于集族 $\mathscr{A}$ 的条件，由该定理即给出必要性。

定理 13·3 设 $S=\{S_n, n\in D\}$ 为 X 上不分明网，对每个 $n\in D$，记 A_n 为所有不分明点 $S_m(m\geqslant n)$ 的并，那么在 $(X, \mathscr{T})$ 中，点 e 为网 S 的聚点当且仅当 e 属于每个 $\overline{A}_n$。

证：当 e 为网 S 的聚点时，由定义 13·2，易见 e 属于每个 $\overline{A}_n$ 反之，设 e 属于每个 $\overline{A}_n$。任取 e 的重域 B 及任意 $m\in D$。因 $e\in\overline{A}_m$，B 与 A_m 重于某点 z，即 $B(z)+A_m(z)>1$。又由于 A_m 为诸 $S_p(p\geqslant m)$ 的并，由命题 2·3，有 $n\geqslant m$ 使 $S_n=z_\mu$ 重于 B，所以 S 常常重于 B，从而 e 为网 S 的聚点。

当 X 上不分明网 $\{S_n, n\in D\}$ 的定义域由正整数组成时（半序由正整数中大小关系 $\geqslant$ 给出），称这类网为 X 上不分明序列，类似于子网的定义，可以从序列出发定义子序列概念。

定理 13·4 设 $(X, \mathscr{T})$ 为 C_1 空间或 $Q-C_1$ 空间，A 为 X 上不分明集，e 为不分明点，则

(1) 点 $e\in\overline{A}$ 当且仅当有 A 中不分明序列收敛于 e。

(2) A 为闭集当且仅当 A 中不分明序列不会收敛于不属于 A 的点。

(3) e 为 A 的聚点当且仅当有 $A-\{e\}$ 中不分明序列收敛于 e。

(4) e 为序列 S 的聚点当且仅当 S 有子序列收敛于 e。

证：由命题 3·1，只要就 $(X, \mathscr{T})$ 为 $Q-C_1$ 空间情形讨论。任取不分明点 e 及其一可数开重域基，$\mathscr{B}=\{B_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$。只要适当取交，就不失一般性地可以假设 $B_n\supset B_{n+1}$。这种重域基称作单调重域基。现在将单调重域基代替点的重域系，(1) 可仿照定理 11·1 同样地证明；(2) 由 (1) 即得；(3) 可仿照定理 11·3 同样地证明（用方才的 (1) 代替那里引用的定理 11·1），至于 (4) 比在不分明网中对应定理 13·2 可以简单些予以证明：当 $S=\{S_n, n\in D\}$ 有子序列收敛于 e 时，e 显然是 S 的聚点。反之，设 S 以 e 为聚点，取 e 的可数单调开重域基 $\{B_i\}(i=1, 2, \cdots)$。显然可以归纳地对每个 B_i 取一点 S_{n_i} 使得 S_{n_i} 重于 B_i 且 $n_i>n_{i-1}$（n_0 理解作零，n_1 可任意取，只要求 S_{n_1} 重于 B_1 于是 $\{S_{n_i}\}i=1,3)\cdots$ 就是收敛于 e 的子序列。

14. 收敛类与不分明拓扑的一一对应

定义 14·1 设 $\mathscr{S}$ 为偶对 (S, e) 的集，其中 S 为 X 上不分明网，e 为 X 上不分明点。若 $\mathscr{S}$ 满足下面四条件，则称作 X 上一个收敛类（convergence classcs）。此时偶对 $(S, e)\in\mathscr{S}$ 也说作网 S 是 $\mathscr{S}$ 收敛于点 e。

(1) 若网 $S=\{S_n, n\in D\}$ 中每个 S_n 都等于某点 e，则 $(S,e)\in\mathscr{S}$。

(2) 若 S 为 $\mathscr{S}$ 收敛于 e，则 S 的每个子网也 $\mathscr{S}$ 收敛于 e。

(3) 若 S 不是 $\mathscr{S}$ 收敛于 e，则存在 S 的一个子网 T，T 的每个子网皆不是 $\mathscr{S}$ 收敛于 e。

(4) 设 D 为定向集，对 D 中每个 m，有定向集 E_m，又设有 X 上累次不分明网 $S=\{S(m,n)\}$（参看定义 12·2），对于 $m\in D$，不分明网 $\{S(m,n\}, n\in E_m\}$ 为 $\mathscr{S}$ 收敛于某点 S_m，得出一个不分明网 $\{S_m, m\in D\}$ 并且这个网 $\mathscr{S}$ 收敛于 e。记 F 为乘积定向集 $D\times(\times\{E_m| m\in D\})$，对 F 中成员 (m,f)，由 $R(m,f)=(m,f(m))$ 给出一定义于 F 上的函数 R，则合或 SoR 是以 F 为定义域的不分明网且 $\mathscr{S}$ 收敛于点 e。

命题 14·1 设 $(X, \mathscr{T})$ 中不分明网 $S=\{S_n, n\in D\}$ 不收敛于点 e，则存在 e 的某开

重域 B 及 S 的一个子网 $T=\{T_m, m\in E\}$ 使得诸 $T_m(m\in E)$ 皆不重于 B，从而 T 的任何子网皆不收敛于 e。

证：由题设有 e 的某开重域 B 使得对任一 $n\in D$，有 $m\geqslant n$ 且 S_m 不重于 B。记 $E=\{m|S_m$ 不重于 $B\}$，E 为 D 的子集。又记 $N: E\to D$ 为恒等映射，易见 $S\circ N=T$ 为 S 的子网且符合题求。

由定理 12·2，命题 14·1 及一些显然性质，可知在 $(X, \mathscr{T})$ 中，不分明网及其收敛点组成的偶对全体确定了一个收敛类。这个收敛类由拓扑 $\mathscr{T}$ 所确定，故记作 $\chi(\mathscr{T})$。反过来，如下面定理所示，给了 X 上一个收敛类 $\mathscr{S}$，也可决定 X 上一个不分明拓扑 $\Psi(\mathscr{S})$。

定理14·1 设 $\mathscr{S}$ 为 X 上一个收敛类，对 X 上不分明集 A，将 A 中所有不分明网 $\mathscr{S}$ 收敛的点并记作 A^c，那么 $A\to A^c$ 决定了一个 X 上的闭包算子（定义 4·3）。若把此闭包算子决定的拓扑记作 $\Psi(\mathscr{S})\equiv\mathscr{T}$，那么 $(S,e)\in\mathscr{S}$ 当且仅当网 S 在拓扑 $\mathscr{T}$ 下收敛于点 e。（亦称 S 为 $\mathscr{T}$ 收敛于 e）。

证：(1) 关于对应 $A\to A^c$ 决定了一个闭包算子z的证明，以及 (2) 当网 S 为 $\mathscr{T}$ 收敛于 e 时，则 $(S,e)\in\mathscr{S}$ 的证明均可分别照抄［10］页 74 定理9的证明的第一段与第三段。(3)今设 $(S,e)\in\mathscr{S}$，要证 S 亦必 $\mathscr{T}$ 收敛于 e，如若不然，由命题 14·1，有 S 的子网 $T=\{T_m, m\in E\}$ 及 e 的开重域 B，使每个 T_m 都不重于 B。由命题 2·1，诸 T_m 皆属于 B 的补集 B'，即网 T 是在 B' 中，又由收敛类性质 (2)，S 的子网 T 也 $\mathscr{S}$ 收敛于 e，按定义 $e\in(B')^c$。但开集 B 的补集是闭集，即$(B')^c=B'$，从而 $e\in B'$，复由命题 2·1，e 不重于 $(B')'=B$，这与 B 为 e 的重域矛盾。

定理14·1 不仅对收敛类 $\mathscr{S}$ 对应了一个拓扑 $\Psi(\mathscr{S})=\mathscr{T}$，而且证明了拓扑 $\mathscr{T}$ 决定的收敛类 $\chi(\mathscr{T})$ 恰是 $\mathscr{S}$，即 $\chi\Psi=1$ 或说对应 χ 是在上（onto）对应。又由定理 11·1，易见对于不同的拓扑 $\mathscr{T}$，对应的收敛类 $\chi(\mathscr{T})$ 也不同，即 χ 是单的，于是 χ 建立了拓扑与收敛类间一一在上对应且 $\chi^{-1}=\Psi$。不难看出这种对应是逆序的，即若拓扑 $\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2$，则 $\chi(\mathscr{T}_1)\subset\chi(\mathscr{T}_2)$。

作者在开展不分明数学的工作中，承蒙中国科学院数学研究所关肇直先生热情支持与鼓励，在此谨表感谢。

作者后记：不分明拓扑学的研究已经较为深入，此文应各方要求，今予重印，但并不想作什么改动或添加一些重要文献。因为一则本文的基本思想（重域系）与结果仍然引起同行的注意。二则后面的发展有不少是立足于本文的，对这些发展有兴趣读者可在了解本文结果下阅读进一步文献。此次重印改了一些印刷错误，并增添了三篇与本文内容直接关连的文献。本文英文稿可参看 J. Math、Anal. Appl. 76(1980)，571—599。中文稿原载四川大学学报（自然科学版），1977 年第一期 31—50。关于传统领域思想在不分明拓扑空间中失效原因，在文献〔15〕中作分析。该文提出几条几乎自明的确定邻近构造的公理，证明了构域系是味足这些公理的唯一邻近构造。

参 考 文 献

［1］ L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and control, 8(1965). 338—353.

［2］ C. L. Chang, Fuzzy toplogical spaces, J. Math. Anal. Appl. 24(1968), 182—189.

[3] J. A. Goguen, the Fuzzy Tychonoff theorem, ibid. 43(1973), 734—742.
[4] B. Hutton, Normality in fuzzy topolgical spaces, ibib50(1975), 74—79.
[5] M. D. Weiss, Fixed points, separation and induced topology for fuzzy sets, ibid. 50(1975), 142—150.
[6] C. K. Wong, Covering properties of fuzzy topological spaces, ibid. 43(1973), 697—704.
[7] ——, Fuzzy topology: product and auotient theorems, ibid. 45(1974), 312—521.
[8] ——, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, ibid. 46 (1974), 316—328.
[9] J. A. Goguen, L-Fuzzy sets, ibid. 18(1967), 145—174.
[10] J. L. Kelley, General Topology, princeton(1955).
[11] N. Bourbaki, Topologie générale, Actualiés Sci. Ind. I045, Paris (1948)
[12] 李中夫，关于导集的杨忠道定理在Fuzzy拓扑空间中的推广，模糊数学，1981年创刊号。
[13] ——，一类L-Fuzzy拓扑空间I，L-Fuzzy点的邻近构造，数学研究与评论（将发表）
[14] 王国俊，拓扑分子格I，陕西师大学报，1979年。
[15] 刘应明拓扑空间中邻近构造，科学通报（即将发表）。

不分明拓扑学Ⅱ—乘积空间与商空间*

蒲保明　刘应明
（四川大学）

在〔6〕中，我们引进了以分明点为特款的不分明点的定义，除习见邻域之外还引入所谓重域概念从而描叙了不分明点的邻近构造，讨论了不分明拓扑空间中 Moore—Smith 式收敛。这样在分明拓扑学代表著作〔5〕中有关这些问题的第Ⅰ、Ⅱ章的定理，除一二条不甚紧要者外，均可推广至不分明拓扑学中。本文目的是将〔5〕中关于乘积空间与商空间的第Ⅲ章的定理全部地推广至不分明拓扑学中。这样，处理这类问题的文献〔1〕—〔4〕中结果得到加强，达到了与分明拓扑学同类问题的相同解决程度；应该指出，本工作比较困难部分是关于乘积空间的一些讨论。本文是〔6〕的继续，〔6〕中约定继续有效；特别地，$(X,\mathscr{T})$，$(Y,\mathscr{U})$ 等将表示不分明拓扑空间。在不混淆时，不分明集、不分明点等等常常迳称作集、点等等，而对应的分明集、分明点等等一般要冠以"分明"一词以强调。

1．不分明连续性

定义1·1[1]　设f：$X\to Y$为函数，对Y上不分明集B，其原象$f^{-1}(B)$是X上不分明集，

定义作 $f^{-1}(B)(x)=B(f(x))$，$(x\in Z)$。对 Z 上不分明集 A，其象 $f(A)$ 是 Y 上不分明集，定义作

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup\{A(x)\mid x\in X\text{且}f(x)=y\}, & \text{当}f^{-1}(y)\text{非空},\\ 0 & ,\text{当}f^{-1}(y)\text{为空}。\end{cases}$$

引理1·1 设 f：$X\to Y$ 为函数，A、B 分别是 Z 与 Y 上的不分明集，下列诸性质成立：

(1) $f^{-1}f(A)\supset A$ 并且 $f^{-1}f(A)=A$ 当且仅当对每个 Y 中分明点 y，当 $f^{-1}(y)$ 非空时，A 在 $f^{-1}(y)$ 的诸点上取常值；特别地，当 f 为单一对应时，有 $f^{-1}f(A)=A$。

(2) $ff^{-1}(B)\subset B$ 并且 $ff^{-1}(B)=B$ 当且仅当 $f(X)\supset \sup pB$；特别地，当 f 为在上对应时，有 $ff^{-1}(B)=B$。

(3) 对 X 上不分明点 x_λ，$f(x_\lambda)$ 是 Y 上不分明点且 $f(x_\lambda)=(f(x))_\lambda$。

(4) 当 $f(A)\subset B$ 时，有 $A\subset f^{-1}(B)$。

(5) 设诸 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 为 X 上不分明集，有

$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$。

这个引理验证是直接的，留给读者。

定义1·2 [1]函数 f：$(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$ 称为不分明连续的，若对每个 $B\in\mathscr{U}$，$f^{-1}(B)\in\mathscr{T}$。又若 f：$X\to Y$ 为在上的一一对应且 f 与 f^{-1} 都是相应的不分明连续映射，那么称 $(Z,\mathscr{T})$ 与 $(Y,\mathscr{U})$ 为不分明同胚的。

定理1·1 设函数 f：$(Z,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$，则下列条件两两等价：

(1) f 是不分明连续的。

(2) 每个（$\mathscr{U}$拓扑下）闭集的原象是（$\mathscr{T}$拓扑下）闭集。

(3) 存在$\mathscr{U}$拓扑某子基$\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$中每个集的原象是开集。

(4) 对 X 上每个不分明点 e 及 Y 中不分明点 $f(e)$ 的每个邻域 V，有 e 的邻域 $\overline{U}$ 使 $f(\overline{U})\subset V$。

(5) 对 X 上每个不分明点 e 及 Y 中不分明点 $f(e)$ 的每个重域 V，有 e 的重域 $\overline{U}$ 使 $f(\overline{U})\subset V$。

(6) 对 X 上每个不分明网 $S=\{S_n, n\in D\}$，若 S 收敛于点 e，则 $f\circ s=\{f(S_n), n\in D\}$ 为 Y 上不分明网且收敛于点 $f(e)$。

(7) 对 X 上任一不分明集 A，有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$。

(8) 对 Y 上任一不分明集 B，有 $\overline{(f^{-1}(B))}\subset f^{-1}(\overline{B})$。

证： (1)与(2)等价性是显然的（参看[1]），其他等价性如(1)↔(3)，(1)↔(4)及(6)→(7)→(8)→(1)等均可仿效分明拓扑学中熟知方法进行。

因此只需证明这里给出的由重域描写的连续性的新刻划，即证(1)→(5)→(6)。关于(1)→(5)。设 $e=x_\lambda$，$f(x)=y$，则 $f(e)=y_\lambda$。由重域定义，有 $f(e)$ 的开重域 $\tilde{\overline{V}}\subset\overline{V}$，$\tilde{\overline{V}}(y)+\lambda>1$。记 $f^{-1}(\tilde{\overline{V}})=\overline{U}$，有 $\overline{U}(x)+\lambda=\tilde{\overline{V}}(y)+\lambda>1$，即开集 $\overline{U}$ 为 e 重域，且 $f(\overline{U})=ff^{-1}$

*本文英文稿全文发表在美刊J.Math.Anal.Appl, 77(1980), 20—37.

$(\widetilde{\overline{V}})\subset\widetilde{\overline{V}}$（引理1·1）。关于(5)→(6)。当网$S$是经重于$A$时，易见 f∘S最终重于集 $f(A)$。由(5)及网收敛定义（[6]定义11.4）即得(6)。

定理1·2 设A为（$X,\mathscr{T}$）中连通集，映射$f(X,\mathscr{T})\to(Y,\mathscr{U})$是连续的，那么$f(A)$为$(Y,\mathscr{U})$中连通集。

证：设$f(A)$不连通，由[6]引理10.1，在$(Y,\mathscr{U})$的子空间$(f(A))_0$（=Supp$f(A)$）上，有非Φ的相对闭集C与D使$C\cup D\supset f(A)$，$C\cap D=\Phi$。记f在A_0上限制为g：$A\to Y$ g自然也是连续的。于是因C与D都是（$f(A)$）$_0$上相对闭集，$g^{-1}(C)$与$g^{-1}(D)$必是子空间A_0中不相交的相对闭集，它们显然非空且$g^{-1}(C)\cup g^{-1}(D)=g^{-1}(C\cup D)\supset g^{-1}(f(A))\supset A$，即$A$也是不连通的，矛盾于题设。

定理1·3 设A，B为（$X,\mathscr{T}$）中不分明集且$X=A\cup B$，$A\sim B$与$B\sim A$为φ—隔离或隔离。又设f为定义于Z上的函数，f在子空间A_0与B_0上的限制分别是连续的，则f在Z上连续。

证：关于$A\sim B$及φ—隔离等定义见[6]§9，本定理由[6]定理9.3即可直接得到。

定义1·3 不分明点族$\Omega=\{e_\alpha\}$称作（$X,\mathscr{T}$）中稠集，若$\mathscr{T}$中每个非Φ的开集必包含有Ω中某点；Ω称作（$Z,\mathscr{T}$）中Q—稠集，若$\mathscr{T}$中每个非Φ的开集必与Ω中某点相重。

容易举例说明稠集与φ—稠集在概念上不彼此蕴涵。

引理1·2 在（$X,\mathscr{T}$）中，不分明点族Ω为Q—稠集的充要条件是$\overline{(\cup\Omega)}=X$。

证：必要性是显然的，因此时Z上每个不分明点显然都是$\cup\Omega$的附着点，从而属于$\overline{\cup\Omega}$。今证充分性，任取开集$A\neq\Phi$，取$x\in\operatorname{supp}A$，记$\lambda=A(x)>0$，$\mu=1-\lambda/2>0$，由于$A(x)=\lambda>1-\mu$，A为点x_μ的开重域，于是由$x_\mu\in X=\overline{\cup\Omega}$，$A$必与$\cup\Omega$重于某点$y$，$A(y)+(\cup\Omega)(y)>1$。由上确界性质，有Ω中某点$e$，使$A(y)+e(y)>1$，即$e$重于$A$。

定理1·4 设f,g：（$X,\mathscr{T}$）→（$Y,\mathscr{U}$）都是连续的，且（$Y,\mathscr{U}$）为不分明T_2空间（[6]定义6.4），记不分明点族$\Omega=\{e\mid f(e)=g(e)\}$，则$\cup\Omega$为$\mathscr{T}$中闭集，从而若Ω为X中$Q$—稠集时，有$f=g$。

证：对任一$x\in X$，$f(x_\lambda)=g(x_\lambda)$当且仅当$f(x)=g(x)$，于是若点$d=y_\mu\notin\Omega$，即有$f(y)\neq g(y)$，从而$f(y)_\mu$与$g(y)_\mu$有各自的开重域$U$与$V$使$U\cap V=\Phi$。由定理1·1的(5)，在$Z$中有$d$的开重域$W$使$f(W)\subset U$，$g(W)\subset V$。由$U\cap V=\Phi$，易见$W\cap(\cup\Omega)=\Phi$，从而$W$与$\cup\Omega$不相重，即$d$不是$\cup\Omega$的聚点。由[6]定理5.1的系，$\cup\Omega$为闭集。至于定理后半，由引理1.2有$X=\overline{\cup\Omega}=\cup\Omega$。所以对任一分明点$x\in X$，有某$e=x_\lambda\in\Omega$的即$f(e)=y(e)$，从而$f(x)=y(x)$，故$f=g$。

2. 乘积空间

定义2·1. [2][3]，设（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）都是不分明拓扑空间（$\alpha\in I$），记诸分明集$Z_\alpha$的笛氏积为$X=\times\{X_\alpha\mid\alpha\in I\}$，$P_\alpha$：$X\to X_\alpha$为相应投射，X上以下列不分明集族$\mathscr{B}$为基的拓扑$\mathscr{T}$称作乘积拓扑；偶对（$X,\mathscr{T}$）称作诸（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）的乘积空间：

$$\mathscr{B}=\left\{\bigcap_{\alpha\in F}\{P_\alpha^{-1}(\overline{U}_\alpha)\}\right\{$$

这里 F 可为 I 的任意有限子集，$\overline{U_\alpha}$可为$\mathscr{T}_\alpha$中任意开集。

以后常称（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）为乘积空间的坐标空间，$Z$中分明点 x 常记作 $\{x_\alpha\}$ 形式，其中 x_α 为Z_α上分明点，称作 x 在 X_α中坐标，方才所定义的基$\mathscr{B}$称作乘积拓扑的定义基。

引理2·1 设$U=\bigcap\limits_{\alpha\in F}\{P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$为乘积拓扑定义基中一个集，那么当$\beta\notin F$时，$p_\beta(U)$是在$Z_\beta$上取常值 λ 的不分明集，这里

$$\lambda=\min_{\alpha\in F}\left\{\sup\{U_\alpha(x_\alpha)\mid x_\alpha\in X_\alpha\}\right\};$$

当$\beta\in F$时，记$F_1=F-\{\beta\}$，那么 $p_\beta(U)=U_\beta\cap A$，这里 A是在X_β上取常值μ 的不分明集：

$$\mu=\min_{\alpha\in F_1}\left\{\sup\{U_\alpha(x_\alpha)\mid x_\alpha\in X_\alpha\}\right\}$$

定义2·2 若X上取常值的任一不分明集都属于$\mathscr{T}$，则称（$X,\mathscr{T}$）为满层空间。

定义2·3 设诸分明集X_α（$\alpha\in I$）的笛氏积为 X，又设 $x\{x_\alpha\}$ 为 X上分明点及$\beta\in I$，那么所谓过点 x与 X_β 平行的截面 $\widetilde{X}_\beta$是X的下列分明子集：

$$\widetilde{X}_\beta=\{y=\{y_\alpha\}\mid \text{当}\alpha\neq\beta\text{时},\ y_\alpha=x_\alpha\}$$

在分明拓扑中，乘积空间的子空间$\widetilde{X}_\beta$ 与 X_β 是很自然地看作同胚的，但在不分明拓扑学中，一般却不真。也正因此，要从乘积空间具有性质 $\mathscr{T}$ 推断出坐标空间（$X_\beta,\mathscr{T}_\beta$）也具有性质$\mathscr{T}$ 时，要比较小心。

定理2·1 记乘积空间（$X,\mathscr{T}$）的子空间$\widetilde{X}_\beta$（定义见前）上相对拓扑为$\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$，则有一一在上连续函数$\varphi$：$\widetilde{X}_\beta\to X_\beta$，并且当（$X_\beta,\mathscr{T}_\beta$）为满层空间时，$\varphi$是同胚映射

证：对$\widetilde{X}_\beta$中任一分明点 $y=\{y_\alpha\}$，令$\varphi(y)=y_\beta$，易见 φ 是一一在上对应，且由乘积拓扑定义，φ是连续的。假若（$X_\beta,\mathscr{T}_\beta$）是满层空间，则$\varphi^{-1}$也是连续的，事实上由于$\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$是以$A=P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap\widetilde{X}_\beta$型的集（$\alpha\in I$，$U_\alpha$为$\mathscr{T}_\alpha$中开集）全体为子基的。由定理 1.1 的(3)，要证 φ^{-1} 的连续性(注意$(\varphi^{-1})^{-1}=\varphi$)，只要证$\varphi(A)$为$\mathscr{T}_\beta$中开集即可。显然 $\varphi(A)=p_\beta p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$。当 $\alpha\neq\beta$ 时，由引理 2.1，$\varphi(A)$是在X_β上取常值的不分明集。由满层空间定义，$\varphi(A)\in\mathscr{T}_\beta$；当 $\alpha=\beta$ 时，易见 $\varphi(A)=U_\beta\in\mathscr{T}_\beta$。

注. 由上述对应φ的建立，以后我们常常把（$X,\mathscr{T}$）的子空间（$\widetilde{X}_\beta,\widetilde{\mathscr{T}}_\beta$）直接地看作$X_\beta$上的不分明拓扑空间，其拓扑是由 $\mathscr{T}_\beta$ 添上若干在X_β 上取常值的不分明集后形成的（自然比$\mathscr{T}_\beta$更细）。

定理2.2 设（$X,\mathscr{T}$）$=\mathrm{X}\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\mid\alpha\in I\}$，则

(1) 乘积拓扑是使每个投射 p_α：$X\to X_\alpha$皆为连续的最粗拓扑。

(2) 当（$X_\beta,\mathscr{T}_\beta$）为满层空间时，相应投射 p_β 是开映射。

证：(1) 是显然的或见［3］定理 3.1. (2) 由引理 1.1 的(5)，只需对乘积拓扑定义基

中开集$U=\bigcap_{\alpha\in F} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$证明 $p_\beta(U)$为开集即可，而这从引理 2.1 即得。

下面定理见于[3]，为完整计，录之如次：

定理2.3[3]. 设f：$(Y,\mathscr{U})\to(X,\mathscr{T})$，这里$(Y,\mathscr{T})=X\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\}$为积空乘间，那么$f$为连续当且仅当每个$p_\alpha\cdot f$为连续。

定理2.4 乘积空间$(X,\mathscr{T})$中不分明网$S=\{S_n,n\in D\}$收敛于不分明点e当且仅当对每个投射p_α: $X\to X_\alpha$, X_α上不分明网$p_\alpha\cdot S=\{p_\alpha(S_n),n\in D\}$收敛于$X_\alpha$上不分明点$p_\alpha(e)$。

证明可应用以上结果参照[5]章Ⅱ定理 4 的证明进行。

定理2.5 (1) 设坐标空间$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ $(\alpha\in I)$中至少有一个是准T_0空间，则乘积空间$(Z,\mathscr{T})$为准T_0。

(2) 当每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是$T_0$(或$T_1$)空间时，
乘积空间$(X,\mathscr{T})$为T_0(相应地T_1)空间。

(3) $(X,\mathscr{T})$为T_2空间的充要条件是每个坐标空间$(Z_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$为$T_2$空间。

证：(1) 由[6]定理 6.1 即明。(2) 当诸坐标空间为T_0空间时，由[6]定理 6.2 及本定理的(1)，$(X,\mathscr{T})$为T_0空间。当诸坐标空间为T_1空间时，注意当F_α为$\mathscr{T}_\alpha$中闭集，$p_\alpha^{-1}(F_\alpha)$必是$\mathscr{T}$中闭集，于是取交，易知$(X,\mathscr{T})$的每个不分明点为闭集，即乘积空间为T_1空间。(3) 充分性是显然的，今证必要性。任取一坐标空间$(X_\beta,\mathscr{T}_\beta)$。设$e$与$d$为$X_\beta$上不分明点，它们的承点分别为$x_\beta$与$y_\beta$，$x_\beta\neq y_\beta$。又设$e$与$d$在自已承点上分别取值为$\lambda$与$\mu$。对I中每个异于$\beta$的指标$\alpha$，取定一分明点$x_\alpha=y_\alpha\in X_\alpha$，这样得到$X$上两个分明点$x=\{x_\alpha\}$及$y=\{y_\alpha\}$。因$x\neq y$，对$X$上不分明点$x_\lambda$与$y_\mu$，有各自的重域$U$与$V$使$U\cap V=\Phi$。由上确界性质及乘积拓扑定义，有定义基中开集$\widetilde{U}=\bigcap_{\alpha\in F} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\subset U$且$\widetilde{U}(x)+\lambda>1$以及$\widetilde{V}=\bigcap_{\alpha\in E} P_\alpha^{-1}(V_\alpha)\subset V$且$\widetilde{V}(y)+\mu>1$。假若$\beta\notin F$，因$x$与$y$仅在$X_\beta$中坐标有所不同，

易见$\widetilde{U}(x)=\widetilde{U}(y)>0$，另一方面已知$\widetilde{V}(y)>0$，从而$\widetilde{U}\cap\widetilde{V}\neq\Phi$，这与$U\cap V=\Phi$矛盾，亦即$\beta\in F$，类似地有$\beta\in E$。考察集$U_\beta\cap V_\beta$。假若它在$X_\beta$某分明点$z_\beta$处取非零值，那么对$\alpha\neq\beta$，令$z_\alpha=x_\alpha$，给出X中分明点$z=\{z_\alpha\}$。显然$P_\beta^{-1}(U_\beta)\cap P_\beta^{-1}(V_\beta)$在$z$处取非零值。此外，

$$\bigcap_{\substack{\alpha\in F\\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha^{-1}(U)\ (z)=\bigcap_{\substack{\alpha\in F\\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)(x)\geqslant\widetilde{U}(x)>0,$$

$$\bigcap_{\substack{\alpha\in E\\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha^{-1}(V_\alpha)\ (z)=\bigcap_{\substack{\alpha\in E\\ \alpha\neq\beta}} p_\alpha^{-1}(V_\alpha)(y)\geqslant\widetilde{V}(y)>0,$$

于是即知$\widetilde{U}\cap\widetilde{V}$在$z$处取非零值。这与$\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\Phi$矛盾，所以$U_\beta\cap V_\beta=\Phi$。现在又由

$U_\beta(x_\beta)=p_\beta^{-1}(U_\beta)(x)\geqslant\widetilde{U}(x)>1-\lambda$ 即U_β为e的开重域，同理V_β为d的开重域，也就是说e与d有各自的重域互不相交，这证明$(X_\beta,\mathscr{T}_\beta)$为$T_2$空间。

当乘积空间有准T_0，T_0，T_1等分离性时，其坐标空间未必有相应的性质。例如取$X_1=X_2=\{x\}$，$\mathscr{T}_1=\{\Phi\}\cup\{x_\lambda|0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$及$\lambda=1\}$，$_2\mathscr{T}=\{\Phi\}\cup\{x_\lambda|\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant1\}$。由[6]的定理6·1 $(X_1,\mathscr{T}_1)$与$(X_2,\mathscr{T}_2)$都不是准T_0（从而也不是T_0，T_1）空间，但它们的乘积空间却显然是T_1空间。不过，这些分离性显然都是有遗传性，所以由定理2.1即知，当其中某坐标空间是满层空间时，它也必有与乘积空间相同的分离性，

3．C_I空间的可乘性

定义3·1 若$(X,\mathscr{T})$仅以在X上取常值的若干不分明集为开集，则称它为粘层空间；特别地若空间仅以Φ与X为开集，这种粘层空间称作粘块空间。

在不分明拓扑学中，粘层空间起的作用与分明拓扑学中平凡拓扑空间（亦即粘块空间）作用相仿。

引理3.1 设K为不可数指标集，对每个$\alpha\in K$对应一正实数δ_α，那么存在$\delta>0$及区间$\widetilde{\Delta}=(\frac{5}{6}\delta,\ \delta)$使集$\{\alpha\in K|\delta_\alpha\in\widetilde{\Delta}\}$为不可数。

证： 因诸$\delta_\alpha>0$，显然有正整数n使集$M=\{\alpha\in K|\delta_\alpha\in(\frac{1}{n+2},\ \frac{1}{n})\}$为不可数。现在分别就$\{\delta_\alpha|\alpha\in M\}$为可数情形（注意对不同的$\alpha$，$\delta_\alpha$可以相同）与不可数情形，不难得知都存在有实数$\lambda>0$，使包含$\lambda$的任意开区间$\Omega$，集合$\{\alpha\in K|\delta_\alpha\in\Omega\}$总是不可数的。今取$\delta=\frac{7}{6}\lambda$，那么$\frac{5}{6}\delta<\lambda$，区间$(\frac{5}{6}\delta,\ \delta)$即为所求。

引理3.2 设K为不可数集。对每个$\alpha\in K$，$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是非粘层空间，则存在不可数子集$J\subset K$及开区间$\Delta=(\rho,\rho+\frac{\delta}{6})$，这里$\delta>0$，$0<\rho<1$，使对每个$\alpha\in J$，$X_\alpha$上有分明点$\widetilde{x_\alpha}$及$\widetilde{y_\alpha}$以及$\mathscr{T}_\alpha$中开集$U_\alpha$满足$U_\alpha(\widetilde{y_\alpha})<U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})-\frac{\delta}{2}$及$U_\alpha(x_\alpha)\in\Delta$。

证： 因每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$不是粘层空间，有$\mathscr{T}_\alpha$中开集$U_\alpha$在上不取常值，从而

$\delta_\alpha=\sup\{|U_\alpha(x^1)-U_\alpha(x^2)|\,|x^1,x^2\in X_\alpha\}$大于零。由引理3.1，有$\delta>0$及开区间$\widetilde{\Delta}=(\frac{5}{6}\delta,\ \delta)$使$J_1=\{\alpha\in K|\delta_\alpha\in\widetilde{\Delta}\}$为不可数。对$\alpha\in J_1$，因$U_\alpha$在$X_\alpha$上振幅$\delta_\alpha\in\widetilde{\Delta}$，即$\delta_\alpha>\frac{5}{6}\delta$，于是有$X_\alpha$上分明点$\widetilde{x_\alpha}$与$\widetilde{y_\alpha}$使$U_\alpha(\widetilde{y_\alpha})<U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})-\frac{\delta}{2}$另一方面，由实直线的周知性质，不难看出有某长度为$\delta/6$的开区间$\Delta=(\rho,\ \rho+\delta/6)$使$J=\{\alpha\in J_1\,|U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})\in\Delta\}$是不可数集，且因诸$U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})>\delta/2$，所以可设$\rho\in(0,1)$，引理证毕。

下面关于C_I空间可乘的充要条件是[3]的定理3.3及3.2的加强。

定理3.1 设（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）（$\alpha\in I$）为$C_I$空间，（$X,\mathscr{T}$）为它们的乘积空间，那么$(X,\mathscr{T})$为$C_I$空间的充要条件是除可数个外，所有（$X_\alpha\mathscr{T}_\alpha$）是粘层空间。

证：必要性：设$\mathscr{B}=\{B_\alpha\}$为（$X,\mathscr{T}$）的可数基，如果题示不真，可取不可数集$J\subset I$，$\rho\in(0,1)$，$\delta>0$及对每个$\alpha\in J$，取$\mathscr{T}_\alpha$的开集U_α与X_α上分明点$\widetilde{x_\alpha}$，$\widetilde{y_\alpha}$如引理3.2所给。现在对每个$\alpha\in J$，可对应$\mathscr{B}$中一集合B_α如次：先取X上一分明点$y=\{y_r\}$；这里$y_\alpha=\widetilde{x_\alpha}$，$y_\beta=\widetilde{y_\beta}$（当$\beta\in J$且$\beta\neq\alpha$时），其他$y_r$（即$r\notin J$时）可任意取定。因$\mathscr{B}$是可数基，故对开集$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$，可对应一$B_\alpha\in\mathscr{B}$使$B_\alpha\subset p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$且$B_\alpha(y)\geqslant p_\alpha^{-1}(U_\alpha)(y)-\frac{\delta}{6}=U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})-\frac{\delta}{6}$。我们说$\alpha\to B_\alpha$的对应是一一的。事实上对另一一个$\beta\in J,\beta\neq\alpha$，注意到$U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})$与$U_\beta(\widetilde{x_\beta})$同属于开区间$\Delta$（参见引理3.2），而其差的绝对值小于$\delta/6$，有

$p_\beta(B_\alpha)(\widetilde{y_\beta})\geqslant B_\alpha(y)\geqslant U_\alpha(\widetilde{x_\alpha})-\delta/6\geqslant U_\beta(\widetilde{x_\beta})-\delta/3$，另一方面，由引理3.2，$U_\beta(\widetilde{y_\beta})<U_\beta(\widetilde{x_\beta})-\delta/2$，有

$p_\beta(B_\beta)(\widetilde{y_\beta})\leqslant p_\beta(p_\beta^{-1}(U_\beta)(\widetilde{y_\beta})=U_\beta(\widetilde{y_\beta})<U_\beta(\widetilde{x_\beta})-\delta/2$，从而$p_\beta(B_\beta)(\widetilde{y_\beta})<p_\beta(B_\alpha)(\widetilde{y_\beta})$即$B_\beta\neq B_\alpha$。现在J是不可数集，而$\mathscr{B}$是可数集，矛盾。充分性：这个证明与分明拓扑学中证明是思路一致的。由[3]定理3.2，我们只需证明下述两条引理就够了。

引理3.3. 对$\alpha\in J$，若（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）都是粘层空间，则乘积空间（$X,\mathscr{T}$）$=X\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)|\alpha\in J\}$也是粘层空间。

引理3.4 任一粘层空间是C_{II}空间。

前者是由于（$X,\mathscr{T}$）中具有子基$\mathscr{S}$，$\mathscr{S}$中每个不分明集在X上总取常值从，而$\mathscr{T}$中任一开集在X上总取常值。后者由实直线上区间[0,1]中下列简单性质即可给出：对于该区间中任一实数集$\{\lambda_\alpha\}=\Omega$，必可取出一可数子集$\Omega_1\subset\Omega$使对每个$\lambda_\alpha\in\Omega$，有序列$\lambda_n\in\Omega_1$满足$\lambda_n\leqslant\lambda_\alpha$且在直线通常拓扑下收敛于$\lambda_\alpha$。

4．Q—C_I空间与C_I空间的乘积空间

在[4]中（定理6.1与定理6.2）给出那里定义的C_I空间乘积问题的部分结果。但是，那里定义的C_I空间并不以分明拓扑学中C_I空间为特款，而且所得结果并非充要条件。本文中C_I空间以及Q－C_I空间皆以分明拓扑学中C_I空间为特款（参看[6]§3）；对于Q－C_I空间，我们给出可乘的充要条件；对C_I空间给出可乘的必要条件并构造反例说明两个C_I空间的乘积未必是C_I的。

定理4.1. 设（$X,\mathscr{T}$）是诸Q－C_I空间（或C_I空间）（X_α，$\mathscr{T}_\alpha$）（$\alpha\in I$）的乘积空间，若$(X,\mathscr{T}$）是Q－C_I空间（或C_I空间），则坐标空间中除可数个外都必是粘层空间。

证：[6]的命题3.1断言每个C_I空间都是Q－C_I空间，所以仅需就诸（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）及$(X,\mathscr{T})$都是Q－$C_I$空间情形加以证明。若定理不真，有不可数指标集$K\subset I$，使每个$\alpha\in K$，（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）不是粘层空间。如引理3.2所示，有不可数指标集$J\subset K$，正实数$\rho$，$\delta$以及对每个$\alpha\in J$，有$\mathscr{T}_\alpha$中开集$U_\alpha$与$X_\alpha$上分明点$\widetilde{x_\alpha}$；$\widetilde{y_\alpha}$满足引理3.2要求。现在对$\alpha\in J$，令$x_\alpha=\widetilde{x_\alpha}$，

对 $\alpha\in I-J$，令 x_α 为X_α中一取定的分明点，得到X上分明点$x=\{x_\alpha\}$，又取$\lambda=1-\rho\in(0,1)$。设不分明点 $e=x_\lambda$ 在$\mathscr{T}$中可数开重域基为B_n（n = 1，2，…）即$B_n(x)>1-\lambda=\rho$。因乘积拓扑是由其定义基给出的，由上确界性质，不妨设 x_λ 的开重域B_n是定义基中成员，即$B_n=\bigcap_{\alpha\in F_n}$

$P_\alpha^{-1}(U_{\alpha,n})$，这里$F_n$为I的有限子集，$U_{\alpha,n}$为 $\mathscr{T}_\alpha$中开集。因J是不可数的，可取某$\beta\in J-\{\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\}$。记$U=p_\beta^{-1}(U_\beta)$，由引理3.2，$U(x)=U_\beta(\widetilde{x_\beta})\in\Delta$，即$U(x)>\rho=1-\lambda$，所以$U$是点 x_λ 的开重域，从而有某$B_n\subset U$。但是由于$\beta\notin F_n$，由引理2.1，$p_\beta(B_n)$在X_β上取常值μ并且$\mu=p_\beta(B_n)(\widetilde{x_\beta})\geqslant B_n(x)>1-\lambda=\rho$，从而

$$p_\beta(B_n)(\widetilde{y_\beta})>\rho>\rho+\frac{\delta}{6}-\frac{\delta}{2}>U_\beta(\widetilde{x_\beta})-\frac{\delta}{2}>U_\beta(\widetilde{y_\beta})=p_\beta(U)(\widetilde{y_\beta}),$$ $p_\beta(B_n)$不包含

于$p_\beta(U)$，从而B_n不包含于U，矛盾。

定理4.2 设（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）（$\alpha\in I$）都是Q－$C_1$空间且其中除可数个外都是粘层空间，则乘积空间（$X,\mathscr{T}$）为Q－$C_1$空间。

证：由[6]命题3.2及本文引理3.3与3.1，易见本定理可归结为其中指标I为可数集情形。任取X上不分明点x_λ，这里x是X上分明点$\{x_\alpha\}$。设X_α上不分明点$(x_\alpha)_\lambda$的可数开重域基为$U_{\alpha,n}$（$n=1,2,\cdots$），那么可数开集族

$$\widetilde{\mathscr{B}}=\{p_\alpha^{-1}(U_{\alpha,n})\mid\alpha\in I,\ n=1,2,\cdots\}$$

中有限个集的交的全体，记作$\mathscr{B}$，形成点x_λ的可数重域基，事实上由$U_{\alpha,n}$为点$(x_\alpha)_\lambda$在$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中开重域，易见$\widetilde{\mathscr{B}}$中每个集，从而$\mathscr{B}$中每个集都是点$x_\lambda$开重域。现任取$x_\lambda$一开重域$V$，由乘积拓扑的定义，可以不妨设$V$为定义基的一个成员：$V=\bigcap_{\alpha\in F}p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$，这里$F$为$I$的有限子集，$V_\alpha$为$\mathscr{T}_\alpha$中开集，显然对$\alpha\in F$，有$V_\alpha(x_\alpha)=p_\alpha^{-1}(V_\alpha)(x)\geqslant V(x)>1-\lambda$，即$V_\alpha$为点$(x_\alpha)_\lambda$的开重域，于是有$(x_\alpha)_\lambda$的开重域$U_{\alpha,n_\alpha}\subset V_\alpha$，令$W=\bigcap_{\alpha\in F}P_\alpha^{-1}(U_{\alpha,n_\alpha})$，那么$W\subset V$且$W\in\mathscr{B}$。这就证明了$\mathscr{B}$确是$x_\lambda$的可数重域基。

下面通过构造反例，建立

定理4.3 存在C_1空间（$X_1,\mathscr{T}_1$）与（$X_2,\mathscr{T}_2$），其乘积空间不是C_1的。

先陈述由乘积拓扑定义即可直接给出的

引理4.1 设（$X_i,\mathscr{T}_i$）以$\mathscr{B}_i$为拓扑基（$i=1,2$）及$(X,\mathscr{T})=(X_1,\mathscr{T}_1)\times(X_2,\mathscr{T}_2)$，又设$B$是$X$上一不分明点$e$的开邻域，那么有$\mathscr{T}$中开集

$$\widetilde{B}=\bigcup_{a}(p_1^{-1}(g_a)\cap p_2^{-1}(f_a)),$$

这里p_i为投射，g_a与f_a分别是$\mathscr{B}_1$与$\mathscr{B}_2$中集，使$\widetilde{\mathscr{B}}\subset B$且$\widetilde{\mathscr{B}}$也是$e$的开邻域。

例1.（1）（$X_1,\mathscr{T}_1$）的构成。取X_1为实直线上区间[0,1]，其中零点标记作x_0对正

整数对（n,m）（要求$n\geqslant m$），令$g_{n,m}$为在区间$\left[0,\frac{1}{n+1}\right]$上取值$1-\frac{1}{m+1}$而在其余处取值为零的不分明集，又记不分明点$X_1-\frac{1}{n+1}$为$h_n$。易见当$n_1\geqslant n_2$，$m=\min(m_1,m_2)$时，有$g_{n_1,m_1}\cap g_{n_2,m_2}=g_{n_1,m}$，$h_{n_1}\cap h_{n_2}=h_{n_2}$以及$g_{n_1,m_1}\cap h_{n_2}=h_l$，这里$l=\min(m_1,n_2)$。所以诸$g_{n,m}$及$h_n$及$\Phi$，$X_1$组成一个拓扑基，记作$\mathscr{B}_1$；相应拓扑取作$\mathscr{T}_1$。易见（$X_1,\mathscr{T}_1$）是$C_{\mathrm{I}}$空间与$C_{\mathrm{II}}$空间。基$\mathscr{B}_1$中非$\Phi$的可数个集标作$g_1,g_2,g_3,\cdots$。

(2)（$X_2,\mathscr{T}_2$）构成。取$X_2=X_1$，记X_2中零点为y。对自然数n，令f_n为在区间$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上取值为1，在其余取值为零的不分明集。易见诸$f_n$及$\Phi$组成$X_2$上一个不分明拓扑，记作$\mathscr{T}_2$，显然（$X_2,\mathscr{T}_2$）是$C_{\mathrm{I}}$空间与$C_{\mathrm{II}}$空间。

(3)（$X,\mathscr{T}$）=（$X_1,\mathscr{T}_1$）×（$X_2,\mathscr{T}_2$）。考察X上以$x\times y$为承点取值为1的（不）分明点e，我在将证明在点e处，不满足第一可数公理。如若不然，设B_n（$n=1,2,\cdots$）是e的可数开邻域基。由引理4.1，可设

$$B_n=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(p_1^{-1}(g_{\lambda(n,i)})\cap p_2^{-1}(f_{\mu(n,i)})\right)(\ast)$$

这里$\lambda(n,i)$与$\mu(n,i)$是自然数，$g_{\lambda(n,i)}$与$f_{\mu(n,i)}$分别是基$\mathscr{B}$而拓扑$\mathscr{T}_2$中非Φ集。对任一B_n，因$B_n(x\times y)=1$，从而上述B_n表示式（$\ast$）中，有某项$p_1^{-1}(g_{\lambda(n,i_n)})\cap p_2^{-1}(f_{\mu(n,i_n)})$在$x\times y$的值大于$1-\frac{1}{n+1}$，从而$g_{\lambda(n,i_n)}(x)>1-\frac{1}{n+1}$。现在取严格递增自然数到$\{S_n\}$使$S_n>\mu(n,i_n)$。令

$$A=\bigcup_{m=1}^{\infty}p_1^{-1}(h_m)\cap p_2^{-1}(f_{s_m})$$

从$h_m(x)=1-\frac{1}{m+1}$，易见A为e的开邻域（即$A(x\times y)=1$）。同时任取定一B_n。可对应X_2中区间$\left(\frac{1}{S_n},\frac{1}{S_n-1}\right)$内一分明点，记作$y_n$我们有

$$B_n(x\times y_n)\geqslant(p_1^{-1}(g_{\lambda(n,i_n)}))\cap p_2^{-1}(f_{\mu(n,i_n)}))(x\times y_n)\geqslant\min(g_{\lambda(n,i_n)}(x),$$
$$f_{s_n-1}(y_n))=g_{\lambda(n,i_n)}(x)>1-\frac{1}{n+1},$$

另一方面，因$m\geqslant n$时，显然$f_{s_m}(y_n)=0$，有

$$A(x\times y_n)=\sup_{m=1,2,\cdots}\{\min(h_m(x),\ f_{s_m}(y_n))\}$$

$$\leqslant\sup_{m=1,2,\cdots,n-1}\{h_m(x)\}=1-\frac{1}{n}$$

亦即$B_n(x\times y_n)>A(x\times y_n)$，$B_n$不包含于$A$中，从而与诸$B_n$形成$e$的邻域基假定矛盾。

这个例子中空间（$X,\mathscr{T}$）是C_{I}空间（定理3.1），所以本例又提供了一个C_{I}（从而$Q-C_{\mathrm{I}}$）

但不是C_I空间的例子（从前这方面例子是通过所谓诱出拓扑给出的，参看[6]定理3.1）。

5. 乘积空间的可分性与连通性

定义5.1 具有可数个不分明点组成的稠集（或Q—稠集）的$(X,\mathscr{T})$称作可分的（相应地Q—可分的）。

虽然如本文§1已指出的，稠集与Q—稠集在概念上不存在蕴涵关系，但却有

命题5.1 $(X,\mathscr{T})$为可分的充要条件是Q—可分的。

证： 设不分明点族$\Omega=\{e_n\}$是可数稠集，记$\text{supp}\, e_n=x_n$，在x_n处取值为1的(不)分明点记作$\widetilde{e_n}$，那么易见$\widetilde{\Omega}=\{\widetilde{e_n}\}$是可数Q—稠集。反过来，设可数点族$\Omega=\{e_n\}$为Q—稠集。记$\text{supp}\, e_n=x_n$，记在$x_n$上取值$\frac{1}{m}$（$m=1,2,\cdots$）的不分明点为$e_{n,m}$，那么不难看出可数点族$\widetilde{\Omega}=\{e_{n,m}|n,m=1,2,\cdots\}$是可数稠集。

以后可分空间与Q—可分空间统称作可分空间。

定理5.1 设每个坐标空间$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$为可分空间（$\alpha\in I$）且指标集$I$的势$\leqslant 2^{\aleph_0}$，则乘积空间$(X,\mathscr{T})$是可分的。

证： 因I的势$\leqslant 2^{\aleph_0}$，可设I为实直线上一子集，从而I中两个指标间可建立序关系。又记$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中可数稠集为$\{e_K^\alpha|K=1,2,\cdots\}$，这里$e_K^\alpha$是$X_\alpha$上不分明点，它在承序点$x_K^\alpha\in X_\alpha$上取值$\lambda_K^\alpha$。现在考察指标集

$J=\{\tau=(r_1,\cdots r_{n-1};k_1,k_n;l)\}$

其中诸k_λ为自然数，诸r_j为有理数满足$r_1<r_2<\cdots<r_{n-1}(n\geqslant 2)$，$l$为区间$(0,1]$中有理数。显然$J$是可数的。对$\tau\in J$，可得$X$中分明点$x^\tau$及在$x^\tau$上取值$l$的不分明点$e^\tau$如次：对$I$中指标$d$，令

$$
\begin{aligned}
\overset{\tau}{x}_\alpha &= x_{k_1}^\alpha && \text{当 } \alpha\leqslant\gamma_1\\
&= x_{k_m}^\alpha && \text{当 } \gamma_{m-1}<\alpha\leqslant\gamma_m \qquad (2\leqslant m<n-1)\\
&= x_{k_n}^\alpha && \text{当 } \gamma_{n-1}>\alpha
\end{aligned}
$$

（这里x_k^α是不分明点e_k^α的承点，已定义于上）。我们说e^τ全体即组成$(X,\mathscr{T})$中可数稠集。事实上，任取X上非空开集$U=\bigcap_{i\in F}p_i^{-1}(U_i)$，这里$F=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$为$I$的有限子集且不妨设$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots<\alpha_n$，诸$U_i$分别是$(X_i,\mathscr{T}_i)$中开集。我们可取$n-1$有理数$r_1,\cdots r_{n-1}$使$\alpha_1<r_1<\alpha_2<r_2<\cdots<\alpha_{n-1}<r_{n-1}<\alpha_n$，在$(X_{\alpha_m},\mathscr{T}_{\alpha_m})$中（$1\leqslant m\leqslant n$）有某自然数$K_m$使$e_{k_m}^{\alpha_m}\in U_{\alpha_m}$，于是取正有理数$l$使$l\leqslant\min\{\lambda_{K_m}^{\alpha_m}|m=1,2,\cdots n\}$，得到指标集$J$中一元素$\tau=(r_1,r_2,\cdots r_{n-1};k_1,\cdots k_n;l)$。易见对每个$m(1\leqslant m\leqslant n)$，有$e^\tau\in p_{\alpha_m}^{-1}$

$(e_{\kappa_m}^{\alpha_m})\subset P_{\alpha_m}^{-1}(U_{\alpha_m})$，从而 $e'\in U$，注意到方才所给的那种型式的开集U组或乘积拓扑的定义基，这就证明了 $\{e'\}$ 全体确是$(X,\mathscr{T})$上可数稠集。即$(X,\mathscr{T})$是可分的。

定理5.2 设I为指标集，诸$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$$(\alpha\in I)$的乘积空间$(X,\mathscr{T})$是可分的，又设每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中存在彼此不相交的非空集$U_\alpha$与$V_\alpha$，则每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$为可分的，且集$I$的势$\leqslant 2^{\aleph_0}$。

证：由于可分性在不分明连续映射下显然保持，经过投射 p_α 即得出$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$的可分性。现在设$(X,\mathscr{T})$中可数稠集为$\Omega$。对每个$\alpha\in I$，可定义一个对应$f_\alpha$：$\Omega\to\{0,1\}$ 如次：对Ω中不分明点 e，设其承点为 $x=\{x_\beta\}$，定义

$$f_\alpha(e)=\begin{cases}1 & \text{当 } x_\alpha\in \operatorname{supp}U_\alpha\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

那么当 α 不同时，f_α 也不同，事实上取$\beta\neq\alpha$，因开集 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap p_\beta^{-1}(V_\beta)$ 显然非空，故含稠集Ω中某点 e。那么 $f_\alpha(e)=1$，$f_\beta(e)=0$，即 $f_\alpha\neq f_\beta$。由于 $\Omega\to\{0,1\}$ 的所有对应的势至多为 $2^{\aleph_0}$，于是I的势$\leqslant 2^{\aleph_0}$。

命题5.2 设在承载集X上，不分明拓扑$\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$细且是由$\mathscr{T}_1$添加进若干在X上取常值的不分明集后生成的拓扑，那么$(X,\mathscr{T}_1)$为连通的当且仅当$(X,\mathscr{T}_2)$为连通的。

证：因$\mathscr{T}_2$比$\mathscr{T}_1$细，当$(X,\mathscr{T}_2)$为连通时，易见$(X,\mathscr{T}_1)$也是连通的（参看[6] § 10 的连通性定义）。反过来，设$(X,\mathscr{T}_1$,为连通的。如若$(X,\mathscr{T}_2)$不连通，则有$\mathscr{T}_2$中非空闭集A与B使 $A\cap B=\Phi$，$A\cup B=X$，显然A与B是X上分张集，从而其补集 A'与B'也是非空的分明集且是$\mathscr{T}_2$中开集。按$\mathscr{T}_2$的生成，$\mathscr{T}_2$中开集 $A'=\bigcup\limits_{\alpha\in J}(U_\alpha\cap C_\alpha)$，这里$J$为一指标集，$U_\alpha$为$\mathscr{T}_1$中开集，$C_\alpha$为在$X$上取非零常值的不分明集，于是注意到 A'在 $\operatorname{supp}A$上取零值而 C_α 却取非零的常值，即知U_α必需在 $\operatorname{supp}A$上取零值，从而$U=\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$ 也在 $\operatorname{supp}A$ 上取零值，即$U\subset A'$，另一方面由A'表达式，有 $A'\subset U$，所以$A'=U$即为$\mathscr{T}_1$中开集。类似可证 B'亦为$\mathscr{T}_1$中开集，从而A与B是非空的$\mathscr{T}_1$中闭集，这与$(X,\mathscr{T}_1)$连通性矛盾。

定理5.3 设$(X,\mathscr{T})$为诸$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$$(\alpha\in I)$的乘积空间，则$(X,\mathscr{T})$为连通当且仅当每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是连通的。

证：当$(X,\mathscr{T})$为连通时，由定理1.2及$p_\alpha(X)=X_\alpha$，即知每个$(X,\mathscr{T}_\alpha)$为连通的。反之，设每个$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$是连通的。首先由命题 5.2 及定理2.1之后的注，易知过X中一点 x 与任一X_β平行的截面，记作$(\widetilde{X}_\beta)$作为$(X,\mathscr{T})$的子空间是连通的。当然也是$(X,\mathscr{T})$中连通集。其次，取定X中一分明点 $x=\{x_\alpha\}$，考察点 x（作为一个不分明集）所属的连通区 D。由方才截面的连通性，易见若分明点 $y=\{y_\alpha\}$ 与 x 仅有一个坐标不同，则 y 包含于连通区D；进而，若分明点 y 与 x 仅有有限个坐标不同时，归纳地可以知道 y 也包含于 D。现在证明$\overline{D}=X$，任取 X上分明点 $z=\{z_\alpha\}$。又取 z（看作不分明点）的任一个重域 V（即 $V(z)>0$），由乘积拓扑定义，有定义基中集$U=\bigcup\limits_{\alpha\in J}P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$，这里$U_\alpha$为$\mathscr{T}_\alpha$中开集，$F$

为有限指标集，使$U \subset V$且U亦为z的重域，即$U(z)=\min\limits_{\alpha\in F}\{U_\alpha(z_\alpha)\}>0$。现在对$\alpha\notin F$，令$y_\alpha=x_\alpha$；对$\alpha\in F$，令$y_\alpha=z_\alpha$，得$X$上一分明点$y$。点$y$与$x$仅有有限个坐标不同，按前述，点$y$属于$D$，即$D(y)=1$。同时$U(y)=\min\limits_{\alpha\in F}\{U_\alpha(y_\alpha)\}=\min\limits_{\alpha\in F}\{U_\alpha(z_\alpha)\}>0$，

故$D(y)+U(y)>1$，即U与D相重于点y，从而V与D相重。因V可以为z的任一重域，故z为D的附着点即$z\in \overline{D}$，由于z是X的任一分明点，故$\overline{D}=X$。现由[6]定理10.1，从而X是连通的。

6．商 空 间

在[5]章Ⅱ关于商空间的定理8、9、10已在[3]§4中推广至不分明拓扑学。在本节内，我们将[5]章Ⅱ关于商空间的其余两条定理(定理11与12)也推广至不分明拓扑学中。

定义6.1 [3]设$(X,\mathscr{T})$为不分明拓扑空间，R是X上一个等价关系，X/R表示商集，p：$X\to X/R$表示商映射，那么易见X/R上不分明集族

$$\mathscr{U}=\{B\,|\,p^{-1}(B)\in\mathscr{T}\}$$

形成一个不分明拓扑，我们称$(X/R,\mathscr{U})$为$(X,\mathscr{T})$(关于商映射p)的商空间，$\mathscr{U}$称作商拓扑。

在不混淆时，商空间简单地标记作X/R。

定理6.1 若商空间$(X/R,\mathscr{U})$是区空间，则相应等价关系R是乘积空间$(X,\mathscr{T})\times(X,\mathscr{T})$中闭子集。反之，若$X$上等价关系$R$是乘积空间$(X,\mathscr{T})\times(X,\mathscr{T})$的闭集，而$X\to X/R$的商映射又是开映射，则商空间$X/R$是$T_2$空间。

证. 记$(X,\mathscr{T})\times(X,\mathscr{T})$为$(Z,\mathscr{S})$。$Z$至两个坐标空间$X$的投射统一地标记作$p_1$：$Z\to X$。假定$X/R$是$T_2$空间。任取$Z$上不分明点$e=(x,y)_\lambda$(这里$x$与$y$为X上分明点，$0<\lambda\leqslant1$)。若$e$不属于$R$，我们将证$e$有某重域与$R$不相重，从而$e\notin\overline{R}$，这也就证明了$R$为$(Z,\mathscr{S})$中闭集。由于$e$不属于$R$，显然$p(x)\neq p(y)$($p$为$X\to X/R$的映射)。于是对$X/R$上不分明点$(p(x))_\lambda$与$(p(y))_\lambda$，由$T_2$分离性，有各自开重域$\widetilde{U}$与$\widetilde{V}$使$\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\Phi$。记$W=p_1^{-1}(p^{-1}(\widetilde{U}))\cap p_1^{-1}(p^{-1}(\widetilde{V}))$。易见$W$是$(x,y)_\lambda$的开重域。且由$\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\Phi$，易反证得知$W$与$R$不相交，自然也就不相重。定理第一部分证毕。今取$Z/R$上不分明点$e_\lambda$与$d_\mu$，这里$e=p(x)$与$d=p(y)$是$X/R$上相异的分明点。因$e\neq d$，所以$(x,y)\notin R$。又记$V=\min(\lambda,\mu)>0$。因$R$为$(Z,\mathscr{S})$中闭集，点$(x,y)_V\notin R$，有其开重域$W$与$R$不相重。但$R$为$(Z,\mathscr{S})$中分明集，即知$W$与$R$不相交。显然可取$\mathscr{T}$中开集$U$与$V$使$G=p_1^{-1}(U)\cap p_1^{-1}(V)$还是$(x,y)_V$的开重域且$G\subset W$。由$G((x,y))+V>1$，易见$U(x)+V>1$，$V(y)+V>1$，从而$p(U)(p(x))+\lambda>1$，$p(Y)(p(y))+\mu>1$而$p$又是开映射，故$p(U)$与$p(V)$分别是

e_λ 与 d_μ 的开重域。同时从$W \cap R=\Phi$,有$G \cap R=\Phi$。由此不难反证得知$P(U) \cap P(V)=\Phi$。这样就证明了(X/R,$\mathscr{U}$)为T_2空间。定理后一部分就获证。

定义6.2 设X为一分明集，X上一个分解(de com position)$\varnothing$是X上一个分明集族$\{X_i\}$,使诸$X_i$$\varnothing$两不相交且$\bigcup X_i=X$。一个分解$\varnothing=\{X_i\}$把X中分明点归并成诸$X_i$,从而也就给出X上分明点之间的一个等价关系，仍记作$\varnothing$；相应地商集记作$X/\varnothing$。

定义6.3 设(X,$\mathscr{T}$)为不分明拓扑空间，$\varnothing$为X上一分解。若对任一在$\varnothing$中等集上取常值，而在其他处取零值的不分明集D，以及$\mathscr{T}$中包含D的任一开集U，都存在$\mathscr{T}$中开集V使$D \subset V \subset U$且V在$\varnothing$中每个集X_i上皆取常值（可因X_i不同，相应的常值也不同）。那么称$\varnothing$为(X,$\mathscr{T}$)的一个上半连续分解。

引理6.1 设$\varnothing$为(X,$\mathscr{T}$)的上半连续分解，不分明集$\widetilde{D}$在$\varnothing$的每个集上皆取常值。又设U为$\mathscr{T}$中开集且$\widetilde{D} \subset U$，则有$\mathscr{T}$中开集V使$\widetilde{D} \subset V \subset U$且$V$在$\varnothing$的每个集上皆取常值。

这从定义6.3出发，把$\widetilde{D}$分解成若干个D_i的并（这里每个D_i仅在$\varnothing$的某集上取常值。在其余处为零值）即易得到所求的V。

下面引理是自明的，为使引用特列为

引理6.2 设A为X上不分明集，p：$X \to X/R$为商映射，那么$p^{-1}p(A)$在等价关系R的每个等价类D上取常值$\sup\{A(x) \mid x \in D\}$，从而要使$p^{-1}p(A)=A$当且仅当$A$在每个$R$的等价类上取常值。

定理6.2 设(Z,$\mathscr{T}$)为不分明拓$\varnothing$空间，$\varnothing$为X上一个分解，那么$\varnothing$为上半连续分解的充要条件为商映射P：$X \to X/\varnothing$为闭映射。

证：充分性：设$\varnothing$为X上一个分解，不分明集D及$\mathscr{T}$中开集U如定义6.3所示。由$D \subset U$有$D' \supset U'$，$p^{-1}p(D') \supset p^{-1}p(U')$。但由引理6.2及$D'$在$\varnothing$的每个集上取常值，有$p^{-1}p(D')=D'$，今取$V=(p^{-1}p(U'))'$，有$D=(p^{-1}p(D'))' \subset V$，且由$p^{-1}p(U') \supset U'$,有$V \subset U$。因$P$为闭映射，$V$显然是$\mathscr{T}$中开集且由引理6.2,$V$在$\varnothing$的每个集上取常值，即$V$符合定义6.3中要求。这就证明了$\varnothing$为上半连续分解。必要性：设$\varnothing$为($X$,$\mathscr{T}$)的上半连续分解。又取$\mathscr{T}$中闭集$A$，要证$p(A)$为商空间$X/\varnothing$中闭集，即要证$p^{-1}p(A)=G$为$\mathscr{T}$中闭集。易见$G \supset A$，从而$G' \subset A'$，由引理6.2，$G$从而$G'$在$\varnothing$中每个集上取常值，又因$A'$为$\mathscr{T}$中开集，由引理6.1，有$\mathscr{T}$中开集$V$使$G' \subset V \subset A'$且$V$在$\varnothing$的每个集上取常值，我们说$G=V'$,从而也就证明了$G$为$\mathscr{T}$中闭集。事实上，由引理6.2，有$p^{-1}p(V')=V'$，$p^{-1}p(G)=G$，又由$G' \subset V \subset A'$,从而$p^{-1}p(G) \supset p^{-1}p(V^{-1}) \supset p^{-1}p(A)$即$G \supset V' \supset G$,故$G=V'$证毕。

参 考 文 献

[1]. C.L.Chang,Fuzzy topological spaces,J.Math.Anal.Appl,24(1968), 182—189 .

[2]. J.A.Goguen, the Fuzzy Tychonoff theotems, ibid.43(1973),734—742.

[3]. C.K.Wong, Fuzzy topology:Product and quotient theotems, ibid, 45(1974), 512—521.

[4]. ——, Fuzzy points and local proterties of fuzzy topology, ibid, 46(1974), 316—328.

[5]. J.L.Kelley, General topology, Princeton (1955).

[6]. 蒲保明，刘应明，不分明拓扑学I——不分明点的邻近构造与Moore—Smith式收敛，四川大学学报(自然科学版)1977年第1期,31—50或J.Math.Anal.Appl,76(1980) 571—599.

不分明拓扑学的进展(1)

四川大学数学系　蒲保明

以现实世界中不分明现象大量存在这一客观事实和在数学领域内多值逻辑和集论的一系列成就为背景，*L.A.Zadeh* 在 1965 年的文〔1〕中首创了不分明子集理论。这不仅为科学技术领域提供了有力的新的数学工具，且为开拓和发展新的数学分支——不分明数学奠定了基础。果然，1968 年 *C.L.Chang* 在文〔2〕里，就在不分明集论的基础上，首次提出了不分明拓扑空间的理论，这就在不分明拓扑学的研究中，迈开了可喜的第一步。

近十年来参加不分明拓扑学研究工作的人数逐渐增多，新成就也不断涌现。近年工作的趋向，主要表现在把分明拓扑空间的基本概念和基本定理，尽可能地推广和移植到不分明拓扑空间里去，要为不分明拓扑学奠定一个牢固的基础。这项奠基工作自然很重要，看来还需持续工作若干年。本文的目的是扼要地介绍近十年来这项奠基工作中出现的一些主要成果，但侧重在介绍我们在〔5〕,〔6〕,〔11〕,〔12〕,〔32〕等文中的一些结果，其中大部分文章尚未发表。

§1. 不分明拓扑空间

为着便于叙述，先界定一些概念：

不空集 X 的幂集 $P(X)$ 和相应的特征函数族 $Ch(X)$ 分别具有运算 $\cup$，$\cap$，C 和 $\vee$，$\wedge$，$'$ 构成两个同构的 *Boole* 代数：$\langle P(X), \cup, \cap, C\rangle$ 和 $\langle Ch(X), \vee, \wedge, '\rangle$，这里的 $\vee$，$\wedge$，$'$ 的含义是：对于每一个 $\psi_1, \psi_2, \psi \in Ch(X)$，和每一个 $x \in X$

$$(\psi_1 \vee \psi_2)(x) = max\left\{\psi_1(x), \psi_2(x)\right\},$$

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)(x) = min\left\{\psi_1(x), \psi_2(x)\right\},$$

$$\psi'(x) = 1 - \psi(x)$$

依据分明集论的后一模型 $\langle Ch(X), \vee, \wedge, '\rangle$ 用 $[0,1]$ 代替 $\{0,1\}$，1965 年，文〔1〕对

分明集论作如下推广：每一个 $A\in[0,1]^X=\{A|A:X\longrightarrow[0,1]\}$ 叫做 X 内的一个不分明子集。对于任意二个不分明子集 A，B，我们界定：

$$A=B\Longleftrightarrow \text{对于每一个 } x\in X, A(x)=B(x),$$
$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \text{对于每一个 } x\in X, A(x)\leq B(x),$$
对于每一个 $x\in X$，
$$(A\cup B)(x)=max\left\{A(x),B(x)\right\},$$
$$(A\cap B)(x)=min\left\{A(x),B(x)\right\},$$
$$A'(x)=1-A(x),$$

由于 $[0,1]$ 是一个完全格，对于 $\{A_i\}_{i\in I}\subset[0,1]^X$，我们作如下定义：对于每一个 $x\in X$

$$(\bigcup_{i\in I}A_i)(x)=\sup_{i\in I}A_i(x)\qquad (\bigcap_{i\in I}A)(x)=\inf_{i\in I}A(x)。$$

于是数学系统 $\langle[0,1]^X,\cup,\cap,\subseteq\rangle$ 显然是一个完全地分配格；但不是一个Boole代数，因为 $A\cap A'$ 不必是 ψ_ϕ，$A\cup A'$ 不必是 ψ_X

1967 年，文〔3〕用某种类型的格，或更一般的偏序集 L 代替 $[0,1]$，将不分明集的概念作了进一步的推广；每一个 $A\in L^X$ 叫做 L——不分明子集或简称 L—集

1968 年，文〔2〕用 $[0,1]^X$ 的子集族，引进一类拓扑空间，其开集是不分明子集。$\langle X,\tau\rangle$ 是一个不分明拓扑空间（简记为 fts）$\Longleftrightarrow X$ 是一个集；$\tau\subset[0,1]^X$ 合于；(i) ψ_X，$\psi_\phi\in\tau$。（简记为 $0,1\in\tau$）；(ii) U，V $\in\tau\Rightarrow U\cap V\in\tau$；(iii) $\left\{U_i\right\}_{i\in I}\subset\tau\Rightarrow\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau$ 叫做 X 上不分明拓扑，每一个 $U\in\tau$ 叫做 τ——开不分明子集（简称 τ—开集），X 的不分明子集 F 叫做 τ—闭的，如果 F' 是 τ—开的

数学系统 $\langle L,\vee,\wedge,*,\leqslant\rangle$ 是一个 cl_∞——拟群 $\Longleftrightarrow$ (i) $\langle L,\vee,\wedge,\leqslant\rangle$ 是一个完全格，(ii) $\langle L,*\rangle$ 是一个拟群，(iii) 对于 L 的 0 和完全元素 1，以及每一个 $a\in L$，有

$$0*a=a*0=0$$
$$a*1=1*a=a$$

(iv)，关于 $\vee$ 和 $*$ 的两个分配律成立：对于任意指标集 I 和每一个 $a,b_i\in L(i\in I)$ 有

$$a*(\bigvee_{i\in I}b_i)=\bigvee_{i\in I}(a*b_i)$$
$$(\bigvee_{i\in I}b_i)*a=\bigvee_{i\in I}(b_i*a)$$

1973 年，文〔4〕为着要对较广泛的不分明空间讨论 Tychonoff 乘积定理，在上述 fts 的定义里用一个 cl_∞—拟群 L 代替 $[0,1]$（当 $*=\wedge$ 时，$[0,1]$ 是一个 cl_∞—拟群），我们得到下述概念：$\langle X,\tau\rangle$ 是一个 L—拓扑空间 $\Longleftrightarrow X$ 是一个分明集且 $\tau\subset L^X$ 合于：(i) $0,1\in\tau$（即 $\psi_\phi,\psi_X\in\tau$），(ii) $A,B\in\tau\Rightarrow A*B\in\tau$，（这里 $(A*B)(x)=A(x)*B(x)$，对于每一个 $x\in X$）。(iii) $\{A\}_{i\in I}\subset\tau\Rightarrow\bigvee_{i\in I}A_i\in\tau$，当 $L=\{0,1\}$ 时，L—拓扑空间归化为分明拓扑空间，当 $L=[0,1]$ 时，L—拓扑空间归化为文〔2〕的 fts。

1976 年，文〔6，又见 29〕和文〔8〕由于各自不同的目的，相互独立地引进了满层空间（这一名称属于〔6〕），即在文〔2〕的不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的定义中增加第四个条件 (iv)；每一个 $a\in(0,1)$ 均属于 τ。应用不分明拓扑结构，可以把许多基本概念推广和移植到不分

明拓扑空间上去。例如 $fts\langle X,\tau\rangle$ 内一个不分明子集 A 的内部 A° 和闭包 $\overline{A}$ 可以分别定义为：

$$A^{\circ}=\bigcup_{\substack{B\in\tau\\ B\leqslant A}} B,\qquad \overline{A}=\bigcap_{\substack{F'\in\tau\\ A\leqslant F}} F$$

§2. 不分明点的邻近构造

在 1968—1974 年间出现的不分明拓扑文献中，基本上只用到一般的不分明子集而未涉及到不分明点，分明拓扑空间的局部性质未能推广到不分明拓扑空间上去，这一现象的原因是由于不分明点的邻域构造理论当时尚未建立起来。1974 年文〔15〕虽曾讨论过不分明点及其邻域构造，但它的不分明点不以正常点为特款，而其邻域构造也未能反映不分明拓扑学中邻域构造的新特性，从而由此所得的结果多呈病态。1975 年，文〔12〕不直接界定不分明拓扑空间 (X,τ) 内不分明点的邻域结构，而是由 (X,τ) 诱出一分明拓扑空间 $(X\times(0,1],\tau\otimes(0,1])$，然后把不分明拓扑的局部性质转化到上述分明拓扑空间的相应局部性质上去讨论。这是一种处理不分明点邻域的间接办法（详§8）.1976年文〔5〕采取另一种途径来构造不分明点的邻近。一方面采用以正常点为特款的不分明点，另方面引进了两个不分明集之间，特别是不分明点和不分明集之间的“重于”关系和“重邻域”的概念。这些新概念在不分明拓扑的研究中将起着重要的作用。

现介绍文〔5〕中不分明点的邻近构造。仅在点 $x\in X$ 处取值 $\lambda>0$，在其他地取值 0 的不分明集称作 X 的不分明点，记作 x_λ，点 x 称作它的承点。不分明点 x_λ 属于不分明子集 A，记作 $x_\lambda\in A\Longleftrightarrow\lambda\leqslant A(x)$。显然 A 可表作所有属于 A 的不分明点的并。$A,\ B\in[0,1]^X$，A 与 B 称作相交的 $\Longleftrightarrow\exists x_0\in X$ 合于 $(A\cap B)(x_0)>0$，此时，称 A，B 相交于点 x_0，A 与 B 称作相重（或 A 重于 B，记作 $AqB\Longleftrightarrow\exists x_0\in$ 合于：$A(x_0)+B(x_0)>1$，此时称 A 与 B 相重于 x_0，显然“重于”关系“q”是对称的。特别，不分明点 x_λ 重于 A：$x_{\lambda q}A\Longleftrightarrow\lambda+A(x)>1$，重于关系在不分明集论，特别在不分明拓扑学中是一个有力的新工具，且有广泛的应用。下面是常用的一条性质：$A\subset B\Longleftrightarrow A$ 与 B' 不相重，特别地，$x_\lambda\in A\Longleftrightarrow x_\lambda$ 不重于 A'。设 $\{A_i\}_{i\in I}\subset[0,1]^X$，$x_\lambda q\bigcup_{i\in I}A_i\Longleftrightarrow$ 有一个 $i_0\in I$ 使 $x_\lambda qA_{i_0}$，设 (X,τ) 为一不分明拓扑空间，不分明集 A 叫做 x_λ 的重域（相应地，邻域），若有 $U\in\tau$ 使 $U\subset A$ 且 $x_{\lambda q}U$（相应地、$x_\lambda\in U$）本身是开集的重（邻）域称作开重（邻）域。在分明拓扑学中，关系“属于”与“重于”，邻域系与重域系皆合而为一。

利用“重于”关系和不分明点的重域的概念，我们可以在不分明拓扑空间里引入一系列基本概念和证明许多与它们相关的重要定理，例如在文〔5〕中已将〔13〕一书中第一、二章的内容，除一、二条定理外，全部推广到不分明拓扑空间里。又如文〔11〕,〔6〕,〔29〕,〔30〕,〔31〕,〔32〕把〔13〕的第五章的部分重要内容作了相应的推广。这方面的工作，我们还在继续进行中。

作为“重于”关系和“重域”概念的应用的具体例子和为以后的叙述方便起见，我们举出下面的基本概念与结果：

设 (X,τ) 是一个不分明拓扑空间，$B\subset\tau$ 叫作 τ 的一个基 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $A\in\tau$，存在

$\{B_i\}_{i\in I}\subset$**B**合于：$A=\bigcup_{i\in I}B_i$。(X,τ)叫作第二可数的或说是C_{II}空间$\Longleftrightarrow\tau$有一个可数基。可以证明：在(X,τ)中，开集族**B**是拓扑基的充要条件是对于任一τ—开集A及任一重于A的不分明点e，有$B\in$**B**使e重于B且$B\subset A$。

在(X,τ)中，不分明点e的若干重域（相应地，邻域）形成一集族**B**，若对e的每一个重域（相应地邻域）A，有$B\in$**B**使$B\subset A$，则称**B**为e的一个重域基（相应地邻域基），若(X,τ)中每个不分明点处都有可数的重域基（相应地邻域基），则空间(X,τ)称作重一第一可数的（相应地，第一可数的），或称之为重—C_I空间（相应地C_I—空间），可以证明下列一些事实：若(X,τ)是C_I空间，则它是重—C_I空间，若(X,τ)是C_{II}空间，则它是重—C_I空间的。设$\langle X,u\rangle$为实轴的子空间$[0,1]$，$\tau=F(u)$为(X,u)诱出的不分明拓扑，则$\langle X,F(u)\rangle$是C_{II}，但不是C_I的。

下面是一个很有用的结果：不分明点$x_\lambda\in\overline{A}\Longleftrightarrow x_\lambda$的每一个重域与$A$相重。不分明点$e=x_\lambda$称作$A$的一个附着点$\Longleftrightarrow e$的每一重域与$A$相重，可以证明：$\overline{A}$是$A$是所有附着点的并。

不分明点e称作不分明集A的聚点，若e是A的附着点并且当$e\in A$时，还要求e的每一个重域与A在异于$Supp(e)$的某点相重，不分明集A的所有聚点的并称作A的导集，记作A^d。可以证明下列两个定理：(1)$\overline{A}=A\cup A^d$、(2)$\langle X,\tau\rangle$中任意不分明集的导集为闭集的充要条件为每个不分明点的导集都是闭集（杨忠道（$C.T.Yang$）定理的推广）。

§3. 不分明网和Moore—Smith式收敛

1968年，文[2]界定了不分明子集列$\{A_n\}_{n\in N}$的收敛概念，设$\langle X,\tau\rangle$是一个不分明拓扑空间，不分明子集W叫做不分明集A的一个τ—邻域，如果有$U\in\tau$使$A\subset U\subset W$。不分明集列$\{A_n\}_{n\in N}$叫作τ—收敛的$\Longleftrightarrow$对于A的每一个τ—邻域W，有$n_W\in N$合于：$n\geqslant n_W\Rightarrow A_n\subseteq W$。1973年，文[4]利用这种收敛方式界定了不分明拓扑空间的的列紧性：一个不分明拓扑空间(X,τ)叫做列紧的$\Longleftrightarrow$它的每一个不分明集列$\{A_n\}_{n\in N}$有一个τ—收敛的子叙列。紧接着证明了这样一个病态的定理：每一个不分明拓扑空间都是列紧的。因此，文[14]曾指出，在不分明拓扑学中，需要新的收敛概念，才能把理论推向前进，从而得到更为丰富更为深刻的结果。文[5]利用新引进的"重于"关系和"重域"概念，把[13]一书中有关*Moore—Smith*收敛的全部结果推广到不分明拓扑空间里，这为对不分明拓扑学的进一步研究提供了一个有力的工具。

下面介绍文[5]中关于不分明网的重一重一收敛性和有关的一部分结果。

设$\langle D,\geqslant\rangle$为一定向集，$X$为分明集，F为$X$上不分明点全体形成的集。由$D$至F的函数$S$称作$X$上的不分明网。对$n\in D$，$S(n)$也常记为$S_n$，于是网$S$也常表示作$\{S_n,n\in D\}$，$D$称作网$S$的定义域。设$S=\{S_n,n\in D\}$为$X$上的不分明网，$A$为$X$上不分明集。若对所有$n$，$S_n$皆重于$A$，则称网$S$重于$A$。若有$m\in D$，使当$n\geqslant m$时，$S_n$皆重于$A$，则称网$S$最终重于$A$。若对$D$中任意$m$，都有$D$中$n\geqslant m$使$S_n$重于$A$，则称网$S$常常重于$A$，若每

个 $S_n\in A$，则称网 S 在 A 中。设 $\langle X,\tau\rangle$ 为一个不分明拓扑空间，S，e 分别为 X 上的不分明网和不分明点。网 S 叫做重、重—τ 收敛于 $e\Longleftrightarrow$ 对于 e 的每一个重域 U，网 S 最终重于 U。

我们可以用网的重、重—收敛性来刻画一些基本概念，例如：

在不分明拓扑空间 (X,τ) 中，不分明点 $e\in\overline{A}\Longleftrightarrow A$ 中有一个不分明网 S 重、重—τ 收敛于 e，$\langle X,\tau\rangle$ 中不分明集 A 是闭的 $\Longleftrightarrow A$ 中每一个不分明网 S 不重、重—τ 收敛于不属于 A 的不分明点。设 A 与 B 为 X 上不分明集，$A—B$ 表示 X 上的一个不分明集，它在满足 $A(x)\geqslant B(x)>0$ 处取零值，在其他处取与 A 同值。可以证明：在不分明拓扑空间 (X,τ) 中，x_λ 为 A 的聚点 $\Longleftrightarrow A—\{x_\lambda\}$ 中有一个不分明网重、重—τ—收敛于 x_λ。

$\langle X,\tau\rangle$ 称作不分明 T_2 空间 $\Longleftrightarrow$ 对承点不同的任意两个不分明点 e 与 d，存在各自的重域 B 与 C 合于：$B\cap C=\phi$。可以证明：在 $\langle X,\tau\rangle$ 中，每一网不同时重、重收敛于两个承点不同的不分明点 $\Longleftrightarrow\langle X,\tau\rangle$ 为不分明 T_2 空间。

设 D 为定向集，对每一个 $m\in D$，E_m 也是定向集。若对每一个 $m\in D$ 及 $n\in E_m$，都对应一个不分明点 $S(m,n)$，这个对应 S 称作 X 上累次不分明网。如果在不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中对于给定的 m，不分明网 $\{S(m,n),n\in E_m\}$ 重、重收敛于 X 上某不分明点 S_m，从而得到网 $\{S_m,m\in D\}$，又设后者重、重收敛于 X 上某不分明点 e，则称累次不分明网 S 的累次极限存在，或说作 S 重、重收敛于 e。

累次极限定理：设在 $\langle X,\tau\rangle$ 中累次不分明网 $S=\{S(m,n)\}$ 重、重—收敛于不分明点 e，对于乘积定向集 $F=D\times(\times\{E_m|m\in D\})$ 的每一个成员 (m,f)，由 $R(m,f)=(m,f(m))$ 定义了 F 上的一个函数 R，则 R 与 S 的合成 SoR 给出了以 F 为定义域的不分明网且 SoR 重、重收敛于 e。

X 上不分明网 $T=\{T_m,m\in E\}$ 称作 X 上不分明网 $S=\{S_n,n\in D\}$ 的子网，$\Longleftrightarrow$ 有由 E 至 D 的函数 N 满足：(i) $T=SoN$，即对每一个 $i\in E$，$T_i=S_{N_i}$，(ii) 对 D 中每一个 n，有 E 中某一个 m 使在 E 中当 $P\geqslant m$ 时有 $N(p)\geqslant n$。

$\langle X,\tau\rangle$ 中不分明点 e 称作网 S 的聚点 $\Longleftrightarrow$ 对于 e 的每一个重域 B，S 常常重于 B。可以证明：$\langle X,\tau\rangle$ 中点 e 为网 S 的聚点 $\Longleftrightarrow S$ 有一个子网重、重—收敛于 e。

设 $S=\{S_n,n\in D\}$ 为 X 上不分明网对每个 $n\in D$，$A_n=\bigcup\limits_{m\geqslant n}S_m$，则在 $\langle X,\tau\rangle$ 中，不分明点 e 为网 S 的聚点当且仅当 $e\in\bigcap\limits_{n\in D}\overline{A}_n$。

在文〔5〕的基础上，1978 年，文〔11〕引进了不分明网的三种互不相蕴含的 *Moore*—*Smith* 式的收敛性，即所谓重、含收敛，含、重—收敛和含、含—收敛。进一步丰富了 *Moore*—*Smith* 收敛理论的内容。不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的不分明网 $\{S_n;n\in D\}$ 重、含—（相应地，含、重—，含、含—）τ—收敛于不分明点 $e\Longleftrightarrow$ 对于 e 的每一个重域（相应地）、邻域、邻域）U，有一个 $n_U\in D$，当 $n\geqslant n_U$ 时，S_n 含于（相应地，重于，含于）U。这里的三种收敛方式与文〔5〕中的重、重—收敛均是互不蕴含的，文〔11〕曾举出这样一个例子。关于这三种新引进的收敛性的应用在以后各节中可以看到。

§4. 不分明分离公里

把分离公理不分明化是不分明拓扑学研究中的重要问题之一，在“重于”关系和“重域”概念未出现之前这个问题是难于很好解决的，1977年，文〔5〕在引进上述概念后，以此为工具，引进了不分明的准 T_0，T_1 和 T_2 公里。

不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 称作不分明准 T_0 的 $\Longleftrightarrow$ 对每一个 $x\in X$，及 $\lambda\neq\mu$，$\lambda.\mu.\in[0,1]$，或 $x_\lambda\notin\{x_\mu\}^-$ 或 $x_\mu\notin\{x_\lambda\}^-$ 不分明准 T_0 公理有如下的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 为准 T_0 的 $\Longleftrightarrow$ 对每一个 $x\in X$ 及 $\rho\in[0,1]$，存在 $B\in\tau$ 合于：$B(x)=\rho$，在界定准 T_0 时，表面上未用到“重于”和“重域”的概念，但在证明下述刻划定理却要以它们为工具。这是由于准 T_0 性涉及到不分明点的闭包，而闭包的刻划又牵涉到“重域”与“相重”的概念。

$\langle X,\tau\rangle$ 称作不分明 T_0 的 $\Longleftrightarrow$ 对于任意两不分明点 e，d，且 $e\neq d$，或 $e\notin\overline{\{d\}}$ 或 $d\notin\overline{\{e\}}$，不分明 T_0 公理有如次的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 为 T_0 的 $\Longleftrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 是准 T_0 的且对于 X 任两不同的 x 与 y 以及任意 $\rho,\nu\in[0,1]$ 有开集 B 使 $B(x)=\rho$ 且 $B(y)>\nu$，或者 $B(x)>\rho$ 且 $B(y)=\nu$。

$\langle X,\tau\rangle$ 称作不分明 T_0 的 $\Longleftrightarrow$ 每个不分明点是闭集。不分明 T_1 公理有如下的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是 T_1 的 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $x\in X$ 及 $\lambda\in[0,1]$，存在 $B\in\tau$ 使 $B(x)=1-\lambda$ 且 B 在其他处取值1。

在§3内讨论不分明网重、重收敛点的唯一性定理时，我们曾引进不分明 T_2 性，为着完备起见，把它重述在这里，以资比较和联系。

$\langle X,\tau\rangle$ 称作不分明 $T_2(Hausdorff)$ 的 $\Longleftrightarrow$ 对于承点不同的任意两个不分明点 e 和 d，存在各自的重域 B 与 C 合于：$B\cap C=\phi$，由于不分明 T_2 空间只讨论承点不同的不分明点的分离问题，T_2 空间可能不是准 T_0 的，则它是 T_1 的，由杨忠道定理的推广定理还看出：在不分明 T_1 空间中，每个不分明集的导集为闭集。

1978年，文〔11〕对不分明公理进行了三方面的工作：

（一）对于文〔5〕中给出的不分明的 T_1，T_2 公理给出了新的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是不分明 T_1 空间 $\Longleftrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 内任意的两个不相重的不分明点 e 和 d，e 有一个邻域与 d 不相重且 d 有一个邻域与 e 不相重。$\langle X,\tau\rangle$ 是不分明 T_2 空间 $\Longleftrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 内每个不分明网不重、含一收敛于两个承点不同的不分明点。

（二）引进了新的不分明公理重—$T_i(i=1,2,3,4)$，并给出了相应的刻划：一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫作重—T_1 的 $\Longleftrightarrow$ 对于 $\langle X,\tau\rangle$ 的一个不分明点 x_λ 及与 x_λ 的承点 x 相异的每一点 $y\in X$，x_λ 有一个邻域与 ψ，不相重且 ψ，有邻域与 x_λ 不相重。这里的 ψ，是指分明集 $\{y\}$ 的特征函数。对于重—T_1 性有如次的一个刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是重—T_1 的 $\Longleftrightarrow$ 对于每一点 $x\in X$，ψ_x 是闭集（ψ_x 指集 $\{x\}$ 的特征函数）不分明 T_1 空间显然是重—T_1 的，但可举出反例说明，其逆不真。

设 A、B 是不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 内两个不分明集，B 称作 A 的一个重域（邻域）$\Longleftrightarrow$ 对于含于 A 的每一个不分明点 e，B 是 e 的一个重域，（相应地，邻域）。A 与 B 叫作含、重—分离，（含、交—分离）的 $\Longleftrightarrow$ A 与 B 分别有邻域（相应地重域）U，V 使得 U

与 V 不相重，（相应地，$U\cap V=\phi$）。$\langle X,\tau\rangle$ 叫做重—T_2 的 $\Longleftrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 内任意两个承点不同的不分明点 e 与 d 是含、重—分离的。集 X 上的一个不分明网 $\{S_n: n\in D\}$ 叫做一个高—网（低—网）$\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $m\in D$，存在一个 $n\in D$，合于：$n\geqslant m$ 且 S_n 在其承点之值 $>\frac{1}{2}$（相应地 $\leqslant\frac{1}{2}$），对于重 T_2 性，有如次的刻划：(i) 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 是一个重 T_2 空间，则 $\langle X,\tau\rangle$ 内每一个高—网（低网），不能含、含—收敛（相应地含、重—收敛）于 $\langle X,\tau\rangle$ 内两个承点不同的不分明点。(ii) 如果 $\langle X,\tau\rangle$ 内每一个不分明点不含、含—收敛（或不含、重—收敛）于 $\langle X,\tau\rangle$ 内两个承点不同的元，则 $\langle X,\tau\rangle$ 是重—T_2 的。

一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做重—T_3 的 $\Longleftrightarrow$ 对于 $\langle X,\tau\rangle$ 的每一个不分明点 e 及不含 e 的承点且使 ψ_S 为闭集的每一个 $S\subset X$，e 与 ψ_S 是重、含—分离的。这里 ψ_S 是 S 的特征函数。对于重—T_3 性，有如次的刻划：对于 $\langle X,\tau\rangle$ 的每个不分明点 e 及每一个 $S\subset X$ 合于：$e\in\psi$，e 有一个邻域 U 合于 $\overline{U}\subset\psi_S$。

一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做重—T_4 的 $\Longleftrightarrow$ 对于任意的 $S,T\subset X$，合于 $S\cap T=\phi$ 且 ψ_S，ψ_T 是闭集，ψ_S 与 ψ_T 是含、重—分离的。对于重—T_4 性，有如次的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是量—T_4 的 $\Longleftrightarrow$ 对任意的 $S,T\subset X$ 合于：ψ_S 是 τ—闭集且 ψ_T 是 τ—开集，$\psi_S\subset\psi_T$，ψ_S 有一邻域 U 合于 $\overline{U}\subset\psi_T$。

重—T_1 的重 $T_i(i=3,4)$ 空间叫作重—正则 $(i=3)$ 和重—正规 $(i=4)$ 空间，显然有：重—正规性 $\Longrightarrow$ 重—正则性 $\Longrightarrow$ 重 T_2 性 $\Longrightarrow$ 重—T_1 性。

（三）把不分明公理与不分明紧性相联系起来推广了〔13〕一书中有关的若干定理。关于这方面的工作详 § 6。

在文〔5〕和〔11〕之前，讨论不分明公理的文章，在 1975 年有两篇，即〔12〕和〔22〕，文用一种特殊类型的拓扑空间，（$X\times(0,1]$，$\tau\otimes(0,1]$）来界定不分明拓扑空间的 T_1,T_2,T_3，T_4 性（详文本 § 8）。

1975 年，文〔22〕引进了不分明单位区间和不分明正规性，并对它给出了 *Urysohn* 引理式的刻划，这为文〔23〕讨论不分明拓扑空间的一致结构奠定了基础，设 $\langle L,\leqslant,\cup,\cap,'\rangle$ 是一个具有逆序对合完全格。$\langle X,\tau\rangle$ 是一个 L 拓扑空间。$\langle X,\tau\rangle$ 叫做正规的 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 τ—闭集 K 和 τ—开集 U 合于：$K\sqsubseteq U$，存在一个 L—集 V 合于：

$$K\sqsubseteq\mathring{V}\sqsubseteq\overline{V}\sqsubseteq U。$$

设 $[0,1](L)=\{\lambda\mid\lambda\in L^R$ 合于下面的 (1),(2),(3)$\}$，这里 R 表实数。

(1) $\lambda\in\downarrow$（即入单调减）

(2) $\lambda(t)=1$ 当 $t<0,t\in R$

(3) $\lambda(t)=0$ 当 $t>1,t\in R$

$[0,1](L)$ 称作不分明单位区间，我们可以在 $[0,1](L)$ 内界定"相等"和"偏序"：对于 $\lambda,\mu\in[0,1](L)$，我们说 $\lambda=\mu\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $t\in R,\lambda(t-)=\mu(t-)$ 且 $\lambda(t+)=\mu(t+)$，这里 $\lambda(t-)=\inf\limits_{s<t}\lambda(s)=\lim\limits_{s\uparrow t}\lambda(t+)=\sup\limits_{s>t}\lambda(s)=\lim\limits_{s\downarrow t}\lambda(s)$，我们说：$\lambda\leqslant\mu\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $t\in R$，$\lambda(t-)\leqslant\mu(t-)$ 且 $\lambda(t+)\leqslant\mu(t+)$。我们在不分明单位区间 $[0,1](L)$ 上引入一个不分明拓扑：对于每一个 $t\in R$，令

$$L_t(\lambda)=\lambda'(t-),\quad R_t(\lambda)=\lambda(t+)$$

显然，L_t，$R_t\in L^{[0,1](L)}$，取 $S=\{L_t,R_t\mid t\in R\}$ 为子基，我们在 $[0,1](L)$ 上建立一个不分明拓扑 u，对于此种正规性，有如次的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是正规的 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 τ—闭集 K 和

τ—开集 U 合于 $K\subseteq U$，存在一个连续函数 f：$X\to[0,1](L)$ 合于：对于每一个 $x\in X$，

$K(x)\leqslant f(x)(1-)\leqslant f(x)(0+)\leqslant U(x)$。

还应提到，文[30]在1978年，平行一般拓扑的分离公理引进了相应的不分明公理并且证明了这样一个定理：设 (X,τ) 是一个分明拓扑空间，$\langle X,F(\tau)\rangle$ 是它的诱导不分明拓扑空间，则有：$\langle X,F(\tau)\rangle$ 是不分明 T_0,T_1,T_2 正则，T_3 的当且仅当 (X,τ) 具有相对应的分离公理。

§5 不分明连续性

1968年，文[2]引进了不分明连续映射的概念，设 f 是一个从 X 到 Y 的一个映射，设 B 为 Y 上的一个不分明集，即 $B\in[0,1]^Y$，我们界定：对于每一个 $x\in X, f^{-1}[B](x)=B(f(x))$，显然，$f^{-1}[B]\in[0,1]^X$，设 $A\in[0,1]^X$，我们界定：对于每一个 $y\in Y$.

$$f[A](y)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in f^{-1}(y)} A(X), & \text{当 } f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & \text{当 } f^{-1}(y)=\phi.\end{cases}$$

显然，$f[A]\in[0,1]^Y$，一个从不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 到不分明拓扑空间 $\langle Y,u\rangle$ 的映射 f 叫做不分明连续的（或 F—连续的）$\Longleftrightarrow$ 对于每一个 u—开集 V，$f^{-1}(V)\in\tau$。在文[2]还有这样一个定理：设 $\langle X,\tau\rangle$ 和 $\langle Y,u\rangle$ 是两个不分明拓扑空间，f 是从 X 到 Y 的一个映射，下面五个条件相互关联如次：(1)$\Longleftrightarrow$(2)，(3)$\Longleftrightarrow$(4)，(1)$\Rightarrow$(3)，(4)$\Longrightarrow$(5)。

(1) f 是 F—连续的，

(2)对于每一个 u—闭集 B，$f^{-1}[B]$ 是 τ—闭集。

(3)对于每一个 $A\in[0,1]^X$ 和 $f[A]$ 的每一个邻域 V，$f^{-1}[V]$ 是 A 的一个邻域。

(4)对于每一个 $A\in[0,1]^X$ 和 f 的每一个邻域 V，有一个 A 的邻域 W 合于：$f(W)\subset V$。

(5)对于 X 的每一不分明集列 $\{A_n\}_{n\in N}$ 合于 A_n 收敛于 $A\in[0,1]^X$，Y 上的不分明集列 $\{f[A_n]\}_{n\in N}$ 收敛于 $f[A]\in[0,1]^Y$。

实际上，上定理中刻划不分明连续性的条件只有一条，即(2)，其余各条均只是不分明连续的必要条件。这种情况在国际文献上停滞了多年。应用重域和重、重一收敛等工具，1976年，文[6]和文[11]先后独立地把[13]一书中连续函数的所有刻划条件全部推广到不分明拓扑学中，这为不分明连续映射的广泛应用奠定了基础，兹将[6]，[29]和[11]所得的结果综述如次：设 $\langle X,\tau\rangle$ 和 $\langle Y,u\rangle$ 是两个不分明拓扑空间，f 是从 X 到 Y 的映射，则下列条件互相等价：

1° f 是不分明连续的，

2° 对于每一个 u—闭集 C，$f^{-1}(C)$ 是 τ—闭集。

3° 对于 u 的一个子基 φ 的每一个成员 U，$f^{-1}(U)\in\tau$。

4° 对于 X 上每个不分明点 e 及 Y 中不分明点 $f(e)$ 的每个重域 V，有 e 的重域 U，使 $f(U)\subset V$。

6° 对于 X 上每个不分明网 $S=\{S_n,n\in D\}$，若 S 重、重一收敛于不分明点 e，则 $f o S=\{f(S_n),n\in L\}$ 为 Y 上不分明网且重、重一收敛于不分明点 $f(e)$。

7° 对于 X 上任一不分明集 A，有 $f(\overline{A})\subset\overline{f[A]}$。

8° 对于 Y 上任一不分明集 B，有 $\overline{f^{-1}[B]}\subset f^{-1}[\overline{B}]$。

§6 不分明紧性

把紧性不分明化是不分明拓扑学研究中另一个重要问题。

1968年，文〔2〕首次引入不分明紧空间的概念。一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做 C—紧的 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $\mathbf{C}\subset\tau$ 合于：$\bigcup_{C\in\mathbf{C}} C=X$（即 $\sup_{C\in\mathbf{C}} C(x)=1$，对于每一个 $x\in X$），存在有限个 $C_i\in\mathbf{C}(i=1,\cdots,m)$ 使 $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} C_i=X$。对不分明 C—紧性，文〔2〕得到两条定理：(1)一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 是 C—紧的 $\Longleftrightarrow$ 每一个具有有限交性的 τ—闭集族有非空之交。(2)，如果 f 是一个映不分明 C—紧空间 $\langle X,\tau\rangle$ 成一不分明空间 $\langle Y,u\rangle$，则 $\langle Y,u\rangle$ 也是 C—紧的。

1973年，文〔14〕继〔2〕之后，对于不分明拓扑空间的复盖性质作了进一步的讨论。文中用平行的方式把分明拓扑学中的可数紧、列紧、半紧等性质移值到不分明拓扑学中，但这种移植不是很成功的。因为采用这些不分明紧性就会得到正如在§3内业已指出过的那个病态结果：每个不分明拓扑空间都是列紧的。虽然如此，对于文〔14〕至少有两点值得肯定的：(1).由于上述的病态结果，指出了应发展的收敛的理论的必要性（见§3）。(2).引进了一类叫做半连续的不分明拓扑空间的特殊不分明拓扑空间，这在许多方面是有用处的（见〔24〕），〔12〕，〔8〕，〔9〕等。设 $\langle X,\tau\rangle$ 是一个分明拓扑空间，对于 $A\in[0,1]^X$，令 $\Gamma_{A,\alpha}=\{x\in X|A(x)>\alpha,\alpha\in(0,1)\}$，设 $F(\tau)=\{A\in[0,1]^X|\Gamma_{A,\alpha}\in\mathrm{T}$，对于每一个 $\alpha\in[0,1]\}$，显然 $\langle X,F(\tau)\rangle$ 是一个不分明拓扑空间叫做半连续不分明拓扑空间，或诱导拓扑空间，文〔14〕利用这一空间分别作出非 C—紧的和非可数紧的不分明拓扑空间。

1973年，文〔4〕引进了 L—空间（见§1）并对 L—空间给出了 $Tychonoff$ 定理成立的一个充分和必要的条件。设 $\{X,\tau\}_{\in I}$ 是一族 L—拓扑空间，$X=\mathbf{X}\{X|i\in I\}$，$P:X\to X_i$ 为相应的投影，X 上以下列不分明集族 $\mathbf{B}$ 为基的拓扑 τ 称作不分明乘积拓扑，$\langle X,\tau\rangle$ 称作 $\{\langle X_i,\tau\rangle\}_{\in I}$ 的不分明乘积空间，$\langle X,\tau\rangle$ 可记为 $\mathbf{X}_{\in I}\langle X,\tau\rangle$。

$\mathbf{B}=\{\bigcap_{i\in F} P_n^{1-}(U)|F$ 为 I 的任意有限子集，$U_i\in\tau\}$ 设 α 为一基数，cl_∞—拟群 L 的单位元1是 α—**弧立的** $\Longleftrightarrow$ 对于每一个指标集 I，$CardI\leqslant\alpha,\{\alpha\}_{i\in I}\subset L$，$\alpha<1\Longrightarrow\bigvee_{\in I}\alpha<1$，文〔4〕证明了如次的不分明 $Tychonoff$ 定理：如果 L 的单位元1是 α—弧立的，I是指标集 $CardI\leqslant\alpha$，$\{\langle X,\tau_i\rangle\}_{i\in I}$ 是一族 C—紧 L—空间，则 $\mathbf{X}_{\in I}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是 C—紧的，它的逆定理也成立：如 L 之单位元1不是 α—弧立的，则有一族 C—紧 L—空间 $\{\langle X,\tau_i\rangle\}$ 它 $CardI=\alpha$，它们的乘积空间不是 C—紧的。

1974年，文〔16〕证明了有限个 C—紧的不分明拓扑空间的乘积空间是 C—紧的。并制作出可数无限多个 C—紧的不分明空间，它们的积空间非 C—紧的，实际上这两个结果已包含在文〔4〕的结果中。1978年，文〔28〕指出〔16〕中另一个结果："有限个可数紧的不分明拓扑空间的乘积空间是可数紧的"是错误的。

1975年，文〔26〕仅就诱导不分明拓扑空间 $\langle X,F(\mathrm{T})\rangle$ 进行讨论，本文作者 $Weiss$ 发现没有一个诱导不分明拓扑空间（甚至是由紧的拓扑空间所诱导的）是 C—紧的，他特为这类特殊的不分明拓扑空间引进一种新的不分明紧性：诱导不分明拓扑空间 $\langle X,F(\mathrm{T})\rangle$ 内的一

个不分明集 A 叫做 ω—紧的当且仅当对于每一个$\gamma>0$，$\omega_\gamma(A)=\{x\in X|A(x)\geqslant\lambda\}$ 是分明拓扑空间 $(X,\mathbf{T})$ 的紧子集。但 ω—紧性仅适用于诱导不分明拓扑空间 $\langle X,F(\mathbf{T})\rangle$。

1975 年，文〔12〕引进了一种较弱的不分明紧性：不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$叫做Z—紧的 $\Longleftrightarrow$ 对于 $\langle X,\tau\rangle$ 的每一个开复盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 和每一个 τ 一闭集 F，存在$U\alpha_j\in\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ $(j=1,\cdots,m)$使 $\bigcup_{j=1}^{m}U\alpha_j\supset F$，对于这种弱紧性，有如次的不分明 $Tychonoff$ 定理：如果每一个 $\langle X_i,\tau_i\rangle$是$Z$—紧的次良性不分明拓扑空间，则 $\underset{i\in I}{\times}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是 Z—紧的，（次良性不分明拓扑空间的定义，为着行文方便起见写在 15 页上）

综上所述，可见对于不分明拓扑空间，引入一种适当的不分明紧性，以使 $Tychonoff$ 乘积定理普遍成立是众所关注的一个问题。1974 年文〔7〕引进一种新的不分明紧性：不分明拓扑空间$(X,\mathbf{T})$叫做$\mathbf{L}_1$—紧的，当且仅当，对于每一个合于：$\bigcup_{U\in\mathbf{U}}U=\psi_X$ 的 $\mathbf{U}\subset\mathbf{T}$，和每一个 $\varepsilon>0$，存在一个有限的 $\mathbf{U}_0\subset\mathbf{U}$ 合于：对于每一个 $x\in X$，$\sup_{U\in\mathbf{U}_0}U(x)\geqslant1-\varepsilon$。文〔7〕得到两个有关$\mathbf{L}$—紧性的结果：(1) $\langle X,F(\mathbf{T})\rangle$ 是 $\mathbf{L}_1$—紧的当且仅当$(X,\mathbf{T})$是紧的；(2)有限个 $\mathbf{L}_1$—紧空间的乘积空间仍是 $\mathbf{L}_1$—紧的，且只限于有限的乘积（又见 1976 年的文〔8〕和 1977 年的文〔9〕。为着引进适当的不分明紧性使一般的 $Tychonoff$ 乘积定理成立。1976 年，文〔8〕首先引进了一种加强了的不分明拓扑空间，（见§1），这种空间在〔6〕中叫做满层空间，再引入另一种不分明紧性：设 $\langle X,\tau\rangle$ 是一个不分明拓扑空间（加强或否），$A\in[0,1]^X$ 叫做 —L 不分明紧的$\Longleftrightarrow$对于每一个族 $\mathbf{B}\subset\tau$ 合于：$\bigcup_{B\in\mathbf{B}}\supseteq A$，以及每一个 $\varepsilon>0$，存在一个有限子族 $\mathbf{B}_0\subset\mathbf{B}$ 使有：

$\bigcup_{B\in\mathbf{B}_0}B\supseteq A-\epsilon$（即对每一个 $x\in X$，$\sup_{B\in\mathbf{B}_0}B(x)\geqslant A(x)-\epsilon$）利用这一不分明紧子集的概念，可界定：一个满层空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做 L_2—紧的 $\Longleftrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 中的每一个常值不分明子集是 $\mathbf{L}_1$—不分明紧的，$\mathbf{L}_2$—紧性也与 $\mathbf{L}_1$—紧性一样具有如下之性质：设 $\langle \mathbf{X},\mathbf{T}\rangle$ 是一个不分明拓扑空间，$\langle X,\mathbf{F}(\mathbf{T})\rangle$ 是它的诱导不分明空间（显然是满层的）$\langle X,F(\mathbf{T})\rangle$ 是 L_2—紧的$\Longleftrightarrow$$\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是紧的。对于 C—紧性，这是不成立的，因为可以作出这样的反例：$\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是紧的，但 $\langle X,F(\mathbf{T})\rangle$ 不是 C—紧的。1977 年文〔9〕对于 $\mathbf{L}_2$—紧性证明了一般的不分明 $Tychonoff$ 定理：如果 $\{\langle X,\tau\rangle\}_{\in I}$ 是一族 $\mathbf{L}_2$—紧的不分明拓扑空间（加强的或满层的），则积空间 $\underset{i\in I}{\times}\langle X,\tau\rangle$ 也是 $\mathbf{L}_2$—紧的。

1978 年，文〔31〕为着推广经典紧性和一般的 $Tychonoff$ 乘积定理到不分明拓扑空间，引进了一种新的不分明紧性，设 L 代表一个完全分配格，具有最小元素 0 和一个最大元素 1（$0\neq1$）以及一个逆序对合 $a\to a'$ $(a\in L)$，设$(X,\mathbf{T})$是一个 L—不分明空间，设 $a\in L$。一集族 $\mathbf{U}\subset\mathbf{T}$ 叫做 X 的一个 α—遮影当且仅当，对于每一个 $x\in X$，存在一个 $U\in\mathbf{U}$ 使 $U(x)>\alpha$，X 的一个 α—遮影 $\mathbf{U}$ 的一个子族 $\mathbf{V}$ 叫做 $\mathbf{U}$ 的一个 α—子遮影，当且仅当 $\mathbf{V}$ 是 X 的一个 α—遮影。L—不分明空间$(X,\mathbf{T})$叫做 α—紧的，当且仅当 X 的每一个 α—遮影有一个有限的 α—子遮影。为着便于叙述 $Tychonoff$ 定理，我们先界定两个 L 的子集：

$$L^c=\{\alpha\in L:\ \alpha\text{ 可与 }L\text{ 的每一个 }\beta\text{ 比较}\},$$

$$L^*=\{\alpha\in L,\ \beta>\alpha\text{ 和 }\gamma>\alpha\Rightarrow\beta\wedge\gamma>\alpha\}.$$

文〔31〕证明了后述的一般 $Tychonoff$ 定理：一族非空的不分明空间族$\{\langle X_\beta,\mathbf{T}_\beta\rangle\}_{\beta\in B}$ 的L—

不分明乘积空间 $\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是 α—紧的，当且仅当，对于每一个 $\beta\in B$，$\langle X_\beta,\mathbf{T}_\beta\rangle$ 是 α—紧的，这里 $\alpha\in L^q$。文〔31〕既推广了经典紧性又建立了一般*Tychonoff* 乘积定理，这对紧性的不分明化问题是一个有意义的进展。1979 年，文〔32〕利用文〔5〕中的“重于”。“重域”和 *Moore－smith* 式收敛等工具引入一种更为广泛的新不分明紧性，Q—紧性，证明了一个推广的 *Tychonoff*定理，且对Q—紧性进行多种刻划，特别是用*Moose—Smith*网收敛进行了刻划。无疑这些结果对紧性不分明化问题作了更完善地解决。现在简述有关概念和结果：设 $\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是一个不分明拓扑空间，β 是 $(X,\mathbf{T})$ 中的一个不分明集，一不分明（开）集族 $\mathbf{B}=\{B_\alpha:\alpha\in I\}$ 叫做 B 的一个（开）重盖当且仅当，对于每一个 $x\in Supp B$，存在某 $B_\alpha\in\mathbf{B}$ 使有

$B_\alpha(x)+B(x)>1$。若重盖 $\mathbf{B}$ 的子族$\widetilde{\mathbf{B}}$ 也形成 B 的重盖，则称$\widetilde{\mathbf{B}}$ 为子重盖。不分明集 B 称作 Q—紧的，当且仅当 B 的每一个开重盖都有一个有限的子重盖。当集 X 本身是 Q—紧时，称$(X,\mathbf{T})$为 Q—紧空间。在文〔31〕中关于$(X,\mathbf{T})$为 α—紧的性质$(\alpha\in[0,1])$显然是等价于X上取常值 $1-\alpha$ 的不分明集是 Q—紧的，所以就 $L=[0,1]$而言，文〔31〕中的讨论是文〔32〕特例。后面是推广的一般 *Tychonoff* 定理：设 B_α 为 $(X_\alpha,\mathbf{T}_\alpha)$ 中的 Q—紧集（$\alpha\in I$)且满足下列条件：

存在正数 δ，使除有限个指标外，对其余的每个指标 α，有 $inf\{B_\alpha(x_\alpha)\mid x_\alpha\in SuppB_\alpha\}>\delta$，则诸 B_α 的乘积 B 是乘积空间中 Q—紧集。特别地，任意多个 Q—紧空间的拓扑积是 Q—紧空间。

1978 年，文〔11〕用不分明网的聚点、附着点和重、重收敛性对不分明紧〔2〕空间进行了刻划，并把〔13〕书中有关紧性与分离性的许多结果以及 *Wallace* 定理推广到不分明拓扑学中去，兹将其中的部分结果写在下面：(1)下列各条件等价：(*a*)不分明拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$集是 C—紧的；(*b*) $\langle X,\tau\rangle$ 内每一个不分明网有一个聚点；(*c*) $\langle X,\tau\rangle$内每一个不分明网有一个子网重、重—收敛于 $\langle X,\tau\rangle$ 内某一个不分明点；(*d*) $\langle X,\tau\rangle$ 内每一个不分明网的附着集不空；(*e*) $\langle X,\tau\rangle$ 内每一个具有限交性的闭集族具有不空的交。(2)不分明C—紧的重—T_3空间是重 T_4 的。(3)不分明 C—紧的重—T_2 空间是重—T_3 的，从而是重一正规的。(4) 设 $\langle A,\tau|_A\rangle$ 是重—T_2 空间 $\langle X,\tau\rangle$ 之一不分明 C—紧子空间，则 ψ_1 是 $\langle X,\tau\rangle$ 的闭子集。(5) *Wallace* 定理之推广：设 $A\subset X$ 使得 $\langle A,\tau|_A\rangle$ 是不分明空间 $\langle X,\tau\rangle$ 之一 C—紧子空间 $B\subset Y$ 使得 $\langle B,\tau|_B\rangle$ 是不分明空间 $\langle Y,\sigma\rangle$ 之一 C—紧子空间。设 Ω 是 $\psi_A\times\psi_B$ 在积空间 $\langle X,\tau\rangle\times\langle Y,\sigma\rangle$ 内任一个邻域，则 ψ_A 有一个在 $\langle X,\tau\rangle$ 内的邻域 Γ 且 ψ_B 有一个在 $\langle X,\sigma\rangle$ 内的邻域 △ 使得 $\Gamma\times\triangle\subset\Omega$。

1974 年，文〔15〕和 1977 年，文〔25〕讨论了不分明局部紧性。

§7　不分明积空间和商空间

1973 年，文〔4〕引进了不分明积拓扑和积空间的概念，并对 cl_∞—拟群 L，给出了使 C—紧 L—空间族 $\{\langle X_i,\tau_i\rangle\}_{i\in I}$，$Card\leqslant\alpha$ 的积空间仍是紧 L—空间的充要条件(见§6)

1974 年，文〔16〕继续了不分明积空间的研究并开展了不分明商空间的讨论，兹将文中所得的有关不分明积拓扑一些结果写在下面：

以下所谈及的不分明拓扑空间是指文〔2〕意义下的，(1) 设 $\langle X,\tau\rangle$ 为不分明空间族

$\{\langle X_i,\tau_i\rangle\}_{i\in I}$ 的乘积空间，则 (i) 不分明积拓扑τ是$X=\times_{\in I}X$,上使每个投影P_α不分明连续的最小不分明拓扑 (ii) 设 $\langle Y,u\rangle$ 是一个不分明拓扑空间，f 是从 Y 到 $X=\times_{\in I}X$ 的一个映射，则 f 是不分明连续的，当且仅当对每一个 $\alpha\in 1$，$P_\alpha of$ 是不分明连续的。(2) 设 $\{\langle X_n,\tau_n\rangle\}_{n\in N}$ 是第二可数不分明拓扑空间的可数族，则积空间 $\times_{n\in N}\langle X_n,\tau_n\rangle$ 也是第二可数的。(3)设 $\{\langle X,\tau\rangle\}_{\in I}$ 是第二可数不分明拓扑空间的不可数族，合于 (i) 其中每一个均不是平庸的或粘块的，(ii)在每一个 $\langle X_i,\tau\rangle$ 内,对于任意 $U\in\tau$ 且 $U\neq\phi$，存在 $x\in X$ 使 $U(x)=1$，则积空间 $\times_{\in I}\langle X,\tau\rangle$ 不是第二可数的。(4)本文关于 C—紧性和可数紧性的两个定理，已在 §6 内论及。

1974 年，文〔15〕中关于不分明积拓扑方面有下述的结果：(1) 设 $\{\langle X,\tau\rangle\}_{\in I}$ 是 C_1 不分明拓扑空间的可数族，则积空间 $X_{\in I}\langle X,\tau\rangle$ 是 C_1 的。(2) 设 $\{\langle X_i,\tau\rangle\}_{\in I}$ 是 C_1 不分明拓扑空间的不可数族，合于：(1) 每一个 $\langle X,\tau\rangle$ 均不是平庸的或粘块的，即对于每个 $i\in I$，存在 $U_i\in\tau_i$ 使 $U_i\neq\phi$，X_i (ii) 对于每一个 $i\in I$，存在一个不分明点 $p\in\tau_{e\alpha}$ 使 $p=\bigcap_{\in I}P^{-1}(p_i)$ 是 $\times_{\in I}X_i$ 内的一个不分明点；(iii) 在每一个 $\langle X_i,\tau_i\rangle$ 内，对于任意 $U\in_i$ 且 $U\neq\phi$，存在 $x\in X_i$ 使 $U(x)=1$，则积空间 $\times_{i\in I}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 不是 C_1 的。(3) 设每一个 $\langle X_i,\tau\rangle$，$i=1,\cdots n$，是局部紧的不分明拓扑空间，则 $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}\langle X,\tau\rangle$ 是局部紧的。一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做局部紧的$\Longleftrightarrow$对于 X 的每一个不分明点 e 存在一个 $A\in\tau$，使 $e\in A$ 是 C 一紧的。

1976 年，文〔6〕,〔29〕对于不分明积空间给出了下列的结果：(1) 设 $\{\langle X,\tau\rangle\}_{\in I}$ 是一族不分明拓扑空间，当 $\langle X_j,\tau_j\rangle$ 是满层空间时，则相应的投影 P_j: $\underset{i\in I}{X}\langle X,\tau\rangle\rightarrow\langle X_j,\tau_j\rangle$是开映射。(2) 不分明积空间 $\underset{i\in I}{\times}\langle X,\tau\rangle$ 中不分明网 $S=\{S_n:n\in D\}$ 收敛于不分明点 $e\Longleftrightarrow$ 对每个投影 $P:\underset{i\in I}{X}\times X\rightarrow X$，$X$上的不分明网 $P\circ S=\{P(S_n):n\in D\}$ 收敛于 X 上的不分明点 $P(e)$。(3) 设坐标空间 $\langle X,\tau\rangle$ $(i\in I)$ 中至少有一个是准 T_0 空间。则乘积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X,\tau\rangle$也是准 T_0 的。(4) 当每一个 $\langle X,\tau\rangle$ $(i\in I)$是T_0（（或 T_1）空间时，积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X_i,\tau\rangle$ 为 T_0（相成地 T_1）空间。(5) 不分明积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是 T_2 空间$\Longleftrightarrow$ 每一个 $\langle X_i,\tau\rangle$ 为 T_2 空间。(6) 为着便于叙述不分明 C_{II} 空间的可乘性定理，先引入下列概念：若 $\langle X,\tau\rangle$ 仅以在 X 上取常值的若干不分明集为开集，则称 $\langle X,\tau\rangle$ 为粘层空间，特别当 $\langle X,\tau\rangle$ 仅以 ϕ 及 X 为开集时，这种粘层空间叫做粘块空间。下述结果是关于不分明 C_{II} 空间可乘的充要条件是文〔16〕的定理 3.2 和定理 3.3 的加强。乘积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X,\tau\rangle$ 是不分明 C_{II} 空间当且仅当每一个因子空间 $\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是不分明 C_{II} 空间，且除可数个外，诸因子空间都是粘层空间。

在文〔15〕中定理 6.1 和定理 6.2 给出那里定义的 C_1 空间积空间的部分结果。但那里定义的 C_1 空间，不以分明拓扑学中 C_1 空间为特款，而且所得结果并非充要条件。文〔5〕用的 C_1 与重—C_1 空间（即 Q—C_1 空间）皆以分明拓扑学中 C_1 空间为特款，对于重—C_1 空间给出可乘的充要条件，对于 C_1 空间，给出可乘的必要条件，并构造一反例，证明，一般来讲，两个 C_1 空间的乘积未必是 C_1 的。这些结果可表为下列的陈述：(1) 设每一个 $\langle X,\tau\rangle(i\in I)$ 是重—C_1 空间（或 C_1 空间），若积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是重—C_1 空间（相应地，C_1空间），

则坐标空间中除可数个外都是粘层空间。(2) 设 $\langle X_i, \tau_i\rangle_{i\in I}$ 是重—C_1 空间族，且其中除可数个外都是粘层空间，则积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X_i, \tau\rangle$ 是重—C_1 空间。(3) 存在不分明空间 $\langle X_i, \tau\rangle$ $(i=1,2)$ 都是 C_1 空间与 C_{11} 空间，但积空间 $\langle X_1\times X_2, \tau_1\times\tau_2\rangle$ 不是 C_1 的。

文〔5〕还讨论了不分明积空间的可分性和连通性。为着叙述这些结果，先给出相关的概念。不分明点 $\Omega=\{e_i\}_{i\in I}$ 族称作不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 的稠集 $\Longleftrightarrow$ τ 中每个非空的开集包含有 Ω 中某点，Ω 称作 $\langle X,\tau\rangle$ 的重稠集 $\Longleftrightarrow$ τ 中每个非空的开集与 Ω 中某点相重。可以举例说明稠集与重稠集在概念上互不蕴含。不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做可分的（或重可分的）$\Longrightarrow$ $\langle X,\tau\rangle$ 具有可数个不分明点组成的稠集（相应地，重稠集）。虽然，稠集与重稠集概念不存在蕴含关系，但可证明：$\langle X,\tau\rangle$ 是可分的当且仅当 $\langle X,\tau\rangle$ 是重可分的。(1) 设每个 $\langle X_i,\tau_i\rangle_{i\in I}$ 是可分的且 $cardI\leqslant 2^{\text{阿勒夫}}$. 则积空间 $\underset{i\in I}{X}\langle X,\tau\rangle$是可分的。(2)设$\underset{i\in I}{X}\langle X, \tau\rangle$ 是可分的，又设每个 $\langle X_i,\tau_i\rangle$ 中存在彼此不相交的开集 U_i 与$\vee$，则每个$\langle X,\tau\rangle$是可分的，且 $cardI\leqslant 2^{\text{阿勒夫}}$。(3) 不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 中不分明集 A_1 与 A_2 称作重—隔离的 $\Longrightarrow$ 存在 τ—闭集 $H_i\supset A$ ($i=1,2$) 使 $H_1\cap A_2=\phi=H_2\cap A_1$。$\langle X,\tau\rangle$ 中一个不分明集 D称作不连通的 $\Longleftrightarrow$ 在不分明子空间 $D_0=suppD$ 中有非空集 A 与 B 是重隔离的；且 $D=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，

而 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 是 A 与 B 的自然延拓。不是不连通的集称作连通集。于是我们有这样的定理：

$\underset{i\in I}{X}\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是连通的 $\Longleftrightarrow$ 每个 $\langle X_i,\tau_i\rangle$ 是连通的。

1974 年，文〔16〕引进了不分明商拓扑和商空间的概念，并将〔13〕的第三章定理 8,9,10 推广至不分明拓扑中，设 $\langle X,\tau\rangle$ 为不分明拓扑空间，R 是 X 上一个等价关系，X/R 表示商集，$P: X—X/R$ 表示商映射，易见 X/R 上不分明集族 $\mathbf{U}=\{B|B\subset X/R$ 合 $P^{-1}(B)\in\tau\}$是一个不分明拓扑，($^X/_R$, $\mathbf{U}$) 称作 $\langle X,\tau\rangle$（关于商映射 P）的商空间，$\mathbf{U}$ 称作商拓扑。(1).(i)商拓扑是使商映射 P 不分明连续的最大的不分明拓扑；(ii)设 $\langle Y,\nu\rangle$ 是一个不分明拓扑空间。设 g 是从不分明商空间 $\langle X/R,\mathbf{U}\rangle$ 到 $\langle Y,\nu\rangle$ 的一个映射，则 g 是不分明连续的 $\Longleftrightarrow$ goP 是不分明连续的。(2)设 f 是从不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 到不分明拓扑空间 $\langle Y,\sigma\rangle$ 的连续满映射合于：f 或是不分明开的或不分明闭的，则在 X 上存在一个等价关系 R 使 $\langle Y,\sigma\rangle$ 不分明胚于不分明商空间 $\langle ^X/_R,\mathbf{U}\rangle$。(3) 为着给出第三个结果，先介定如下概念。设 A 是不分明拓扑空间 $\langle X, \tau\rangle$ 的不分明集，设 R 是 X 上的一个等价关系，设 $\mathbf{D}=\langle X_i\rangle_{i\in I}$ 是由 R 给出的一个分解（即：$x,y\in X\Longleftrightarrow x,y$ 是 R—相关的）。现介定两个新的不分明集 A_1, A_2 合于：

$$A_1(x)=\sup_{y\in X_i} A(y) \quad , \quad x\in X_i$$

$$A_2(x)=\inf_{y\in X_i} A(y) \quad , \quad x\in X_i$$

A_1, A_2 分别称作 A 的上、下不分明集。第三个结果是：设P是从不分明拓扑空间$\langle X,\tau\rangle$到其不分明商空间 $\langle ^X/_R,\mathbf{U}\rangle$ 的投影，则下列三条等价：(i) P 是开的；(ii) 如果 A 是 τ—开的，则 A 的上不分明集 A_1 是 τ—开的；(iii) 如果 A 是 τ—闭的，则 A 的下不分明集 A_2 是 τ—闭的。

如果将上述定理中 (i), (ii), (iii) 的“开”与“闭”互换，其结果仍然等价。

文〔5〕推广了文〔13〕的定理3.11和定理3.12，给出了下列两个结果：(1)、(i) 如果不分明商空间 $\langle {}^{X}/_{R}, \mathbf{U}\rangle$ 是 T_2 空间，则 R 是积空间 $\langle X,\tau\rangle\times\langle X,\tau\rangle$ 中的闭子集，(ii)如果 X 上的等价关系 R是$\langle X,\tau\rangle\times\langle X,\tau\rangle$的闭子集，而$X\to{}^{X}/_{R}$ 的商映射P是开映射，则$\langle {}^{X}/_{R}, \mathbf{U}\rangle$ 是 T_2 的。(2) 先给出定义：设 $\langle X,\tau\rangle$ 为不分明拓扑空间，$\mathbf{D}$ 为 X 上的一个分解，若对任一在 $\mathbf{D}$ 中某集上取常值，在其他处取零值的不分明集 D，以及 τ 中包含 D 的任一开集 U 都存在 τ 中的 $\vee$ 使 $D\subset\vee\subset U$。且 $\mathbf{V}$ 在 $\mathbf{D}$ 中每个集 X_i 上取常值，则称 $\mathbf{D}$ 为 $\langle X,\tau\rangle$ 的一个上半连续分解。于是第二结果可述为：设 $\langle X,\tau\rangle$ 为不分明拓扑空间，$\mathbf{D}$ 是 X 上的分解，则 $\mathbf{D}$ 为上半连续分解 $\Leftrightarrow$ 商映射 P：$\langle X,\tau\rangle\to\langle {}^{X}/_{R}, \mathbf{U}\rangle$ 是闭映射。

§8　分明拓扑空间与不分明拓扑空间的关系

1973年，文〔14〕由分明拓扑空间，导出了一个特殊的不分明拓扑空间（叫做半连续不分明拓扑空间）这一事实已在§6中论及，1975年，文〔26〕直接用下半连续函数族界定了与上述空间等价的诱导不分明拓扑空间。设 $\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是分明拓扑空间，$F(\mathbf{T})=\{f\mid f: X \underset{lsc}{\longrightarrow} [0,1]\}$，（即 $F(\mathbf{T})$ 是 X 内的一切下半连续不分明集的总体）称作 X 上的诱导不分明拓扑。（实际上容易证明：$F(\mathbf{T})$ 是 X 上的一个不分明拓扑）。对于这特殊的不分明拓扑空间 $\langle X, F(\mathbf{T})\rangle$ 的性质研究，往往归结到拓扑空间 $\langle X, \mathbf{T}\rangle$ 内相应性质的研究上去。例如：$A\in F(\mathbf{T})\Leftrightarrow \sigma_r(A)=\{x\in X\mid A(x)>r\}\in\mathbf{T}$。又如：$f$：$\langle X,F(\mathbf{T})\rangle\to\langle Y,F(\mathbf{U})\rangle$ 是不分明连续的，当且仅当

f：$(X,\mathbf{T})\to(Y,\mathbf{U})$是连续的。

这样便建立了分明拓扑空间与一类特殊的（由原空间诱导出来的）不分明拓扑空间的某些关系。

1975年，文〔12〕对分明拓扑空间与不分明拓扑空间之间的关系进行了两个方面的研究。一方面继续对诱导不分明拓扑作了进一步的探讨，得到更多的结果。另一方面的工作从某种意义上来说与前者的工作方向是相反的，第一方面的工作是预给出一个分明拓扑空间$(X,\mathbf{T})$诱导出一个特殊的不出明拓扑空间，$\langle X,\mathbf{F}(\mathbf{T})\rangle$，而把这特殊的不分明拓扑空间$\langle X,F(\mathbf{T})\rangle$的研究，归结到原给的分明拓扑空间（$X,\mathbf{T}$）上去，第二方面的工作方向恰恰相反，预给出一个一般的不分明拓扑空间 $\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 用某种方式，诱导出一个特殊的分明拓扑空间，而把预给的不分明拓扑空间的研究归结到诱导出来的分明空间上去。这样就建立了一般的不分明拓扑空间与某些特殊的分明拓扑空间之间的联系。但两个方面的工作都有一个共同特点，就是要把不分明空间的研究。归结到分明拓扑空间上去。

由于文〔12〕的内容较多，全文又尚未整理，这里只作为举例简介下列的一些结果。

设 $\langle X,\mathbf{T}\rangle$ 是一个分明拓扑空间，$\mathbf{F}(\mathbf{T})$ 是 $\mathbf{T}$ 的诱导拓扑，则（$X,\mathbf{F}(\mathbf{T})$）是第二可数的 $\Leftrightarrow$ $(X,\mathbf{T})$ 是第二可数的。$\langle X,\mathbf{F}(\mathbf{T})\rangle$ 是正规的（即：对于任意的 $\mathbf{F}(\mathbf{T})$——闭集 F，$\mathbf{F}(\mathbf{T})$——开集 U 合于：$F\subset U\ \exists\ O\in\mathbf{F}(\mathbf{T})$ 使 $F\subset O\subset\overline{O}\subset U$）$\Leftrightarrow(X,\mathbf{T})$ 是正规的。f：$\langle X,\mathbf{F}(\mathbf{T})\rangle\Leftrightarrow\langle Y,\mathbf{F}(\mathbf{U})\rangle$ 是开（或闭）映射 $\Leftrightarrow f$：（$X,\mathbf{T}$）$\Leftrightarrow$（$Y,\mathbf{U}$）是开（相应地、闭）映射。

关于文〔12〕第二方面的结果，可以举出下面的一些例子。

设 $\langle X,\tau\rangle$ 是一个不分明拓扑空间，对于每个 $A\in[0,1]^X$ 和 $r\in(0,1$, 设 $\sigma_r(A)=\{x\in X|A(x)>r\}$, $u_r(\tau)=\{\sigma_r(G)|G\in\tau\}$。显然，对于每个 $r\in(0,1)$, $u_r(\tau)$ 是 X 上的一个分明拓扑，$u(\tau)=\underset{r\in(0,1)}{lub}u_r(\tau)$ 也是 X 上的一个分明拓扑。所以任予一个不分明拓扑空间，可以诱导出一族分明拓扑空间 $\{\langle X,u_r(\tau)\rangle\}_{r\in(0,1)}$，和 $\underset{r\in(0,1)}{lub}\ u_r(\tau)=u(\tau)$。容易看出：

$$\tau\subset\mathbf{F}(u(\tau))$$

一个不分明拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 叫做良好的 $\Longleftrightarrow\tau=\mathbf{F}(u(\tau))$。$(X,\tau)$ 叫做次良的 $\Longleftrightarrow$ 每一个 $u(\tau)$ 的元 U 的特征函数 $\psi_U\in\tau$。对于良好的拓扑空间 $\langle X,\tau\rangle$ 可以证明：对于每一个 $r\in(0,1)$, $u_r(\tau)=u(\tau)$。对于良好拓扑，有如次的刻划：$\langle X,\tau\rangle$ 是一个良好的不分明拓扑空间 $\Longleftrightarrow$ 对于每一个 $U\in u(\tau)$ 和 $\gamma\in(0,1)$, $f_{U,\gamma}\in\tau$，这里

$$f_{U,\gamma}(x)=\begin{cases}\gamma & \text{当 } x\in U \text{ 时}\\ o & \text{当 } x\notin U \text{ 时。}\end{cases}$$

在 $\langle X,\tau\rangle$（不分明拓扑空间）与其诱导出的分明拓扑空间 $\langle X,u(\tau)\rangle$ 之间有许多性质上的关系，例如 $(X,u(\tau))$ 是连通的，则 $\langle X,\tau\rangle$ 也是连通的，即 ψ_X 不能表成两个不相交二分明闭集之并。若 τ 是良性的，则 $\langle X,\tau\rangle$ 连通蕴含（$X,u(\tau)$）也连通。若 $\langle X,\tau\rangle$ 为第二可数的，则（$X,u(\tau)$）也是第二可数的。如果 τ 是良性的，这个结果之逆也是真的。

为着讨论不分明拓扑的局部性质，先由一个不分明拓扑空间诱出另一个分明拓扑空间。设 $\mathbf{p}=x_t=(x,t)$ 是 X 上一个不分明点，$A\in[0,1]^X$，界定：$\mathbf{p}\leqslant A\Longleftrightarrow t\leqslant A(x)$, $\mathbf{p}<A\Longleftrightarrow t<A(x)$。$p>A\Longleftrightarrow t>A(x)$，设 $\langle X,\tau\rangle$ 是予给的一个不分明拓扑空间，设 F 为 τ—闭集，U 为 τ—开集，$F\subset\mathbf{U}$。设 $(F,U)=\{p=(x,t)|F<p<U\}$ (ψ_ϕ,U), $=\{p=(x,t)|\psi_\phi<p<U\}$，和 $(F,\psi_X)=\{p|F<p\leqslant\psi_X\}$，由于（$F_1,U_1$）$\cap(F_2,U_2)=(F_1\cup F_2,U_1\cap U_2)$，因此 $X\times(0,1]$ 上的集族 $\{(F,U),(\psi_\phi,U),(F,\psi_X)|F',U\in\tau\}$ 是 $X\times(0,1]$ 某一分明拓扑（记作 $\tau\otimes(0,1]$）的基，于是由预给的不分明拓扑空间，诱出了一个分明拓扑空间（$X\times(0,1]$。$\tau\otimes(0,1]$。显然 X 上所有不分明点所构成的集合与 $X\times(0,1]$ 成一、一对应，因此一个不分明点 $p=(x,t)$ 可视可笛卡积 $X\times(0,1]$ 的一个点，反之亦然。X 上的不分明拓扑 τ 与 $X\times(0,1]$ 上的分明拓扑 $\tau\otimes(0,1]$ 有着特殊的联系。用（$X\times(0,1]$; $\tau\otimes(0,1]$）的某些（局部）性质来界定 (X,τ) 的（局部）性质。例如文[12]中，称不分明拓扑空间 (X,τ) 为 $T_i(i=1,2,3,4)$ 的当且仅当分明拓扑空间 $(X\times(0,1],\tau\otimes(0,1])$ 是 $T_i(i=1,2,3,4)$ 的，由此也可导出有关 (X,τ) 的分离性一些结果。但这种由相关联的分明拓扑 $\tau\otimes(0,1]$ 所界定的性质，对不分明拓扑空间 (X,τ) 的内在特征尚缺乏探讨。

不分明拓扑学的研究在国内开展的时间虽然不长，但发展似乎较快。一方面参加这方面工作的同志逐渐增多，新的成果也不断出现，仅在1979年九月在芜湖举行的全国拓扑学学术报告会上就新提出了这方面的论文多篇（见[33]—[41]），由于篇幅的限制，未能在本文内对这些论文的内容进行介绍。我们将在本文（Ⅱ）中继续阐述。

参 考 文 献

[1] L,A,Zadeh, Fuzzy sets, Infomation and Control 8(3),338-353(1965)

〔2〕 C,L,Chang, Fuzzy Topological spaces, J,Math. Anal.Appl. 24,182－190(1968)
〔3〕 J.A.Goguen, L－Fuzzy Sets, ibid 18(1)145－174 (1967)
(4) J.A.Goguen, The Fuzzy Tychonoff Theorem ibid, 56(3)621－633(1973)
〔5〕 蒲保明和刘应明，不分明拓扑学 I—不分明点的邻近构造与 Moore－Smith 式收敛，四川大学学报（自然科学版）1977 年第 1 期 31－50.
〔6〕 蒲保明和刘应明，不分明拓扑学 II —乘积空间与商空间 1976 年，
〔7〕 R.Lowen, Topologie floues, C.R.Acad Sci Parist. 278(1974)serA. 925－928
〔8〕 R.Lowen, Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness. J.math.Anal. Appl. 56,621－633(1976)
〔9〕 R.Lowen, Initial and Final Fuzzy topologies and the Tychonoff Theorem ibid.58,11－21(1977)
〔10〕 R.Lowen. A Theory of Fuzzy Topologies. Ph.D.Thesis, Free Universlty of Brussels Belgium,1974.
〔11〕 蒋继光 不分明拓扑空间的分离公理与紧性。（四川大学学报，自然科学版 1979 ）
〔12〕 周浩旋 分明拓扑空间与不分明拓扑空间的关系。（ 1975 末发表）
〔13〕 J,L,Kelley General Topology,1955
〔14〕 C,K,Wong Covering Properties of Fuzzy Topological Spaces. J.Math.Anal Appl,43(1973),697－704
〔15〕 C,K,Wong Fuzzy Points and Local Properties of Fuzzy Topology, ibid 46(1974)316－328
〔16〕 C.K.Wong. Fuzzy Topology:Product and Quotient Theorems, ibid 45(1974)512－521
〔17〕 C,K,Wong. Fuzzy Topology, 1975, In"Fuzzy set and their Applicationto Cognitive and Decision Processes"
〔18〕 C,K,Wong. Categories of Fuzzy Sets and Fuzzy Topological Spaces. J.Math. Anal.Appl, 53(1976)704－714
〔19〕 J,Michalek. Fuzzy Topologies, Kyborneetike (Prague), 11(5) (1975),345－354 MR53*14382
〔20〕 J.Micha'lek and I.Kramosil, Fuzzy metrics and statistical metric spaces, ibid 11(1975)336－344 MR53*14381
〔21〕 B,Hutton Fuzzy Topotogical Spaces,ph.D. Thesis, University of Warwick, England.

〔22〕 B,Hutton Normality in Fuzzy Topological Spaces J,Math,Anal,Appl,50(1975)74—79,

〔23〕 B,Hutton Uniformities on Fuzzy Topological Spaces ibid,58(1977)539--571.

〔24〕 B,Hutton aud Reilly Separation Axioms in Fuzzy Fopological Spaces (To appear)

〔25〕 F.T.Chriestoph, Qutient Fuzzy Topology and Local Compactness, J,Math,Anal,Appl, 57,497—504(1977)

〔26〕 M.D.Weiss, Fixed Points,Separation and Induced Topology for Fuzzy Sets, ibid. 50(1975)142—150

〔27〕 吴从炘 关于不分明拓扑线性空间 I （已投科学通报）

〔28〕 王国俊 两个可数紧的不分明拓扑空间的积空间不必是可数紧的（1978 年全国数学会年印发资料）

〔29〕 蒲保明，刘应明 不分明拓扑学中的乘积空间与商空间 科学通报 1979 年第 3 期 97—100

〔30〕 王子孝 Fuzzy 拓扑空间的分离公理（1978 年全国数学会印发资料）

〔31〕 T.E.Gantner,R.C.Steinlage and R.H.Warren,Compactness in Fuzzy Topological spaces,J.Math.Anal.Appl.62(3)(1978)547—562

〔32〕 刘应明 不分明拓扑空间中紧性与TuxoHob）1979 年全国拓扑学术报告会印发资料）

〔33〕 刘应明 不分明单位区间的紧性的一个问题（同上）

〔34〕 蒋继光 不分明拓扑空间的分离公理与紧性（Ⅰ）同上

〔35〕 蒋继光 不分明仿紧空间（同上）

〔36〕 王国俊 拓扑分子格（1）（同上）

〔37〕 金长泽 不分明拓扑空间的局部紧致性（同上）

〔38〕 王子孝 Fuzzy 拓扑空间$(X,\omega(\tau))$与拓扑空间(X,τ)的比较(同上)

〔39〕 胡诚明 不分明拓扑学中的一个嵌入定理（同上）

〔40〕 胡诚明 关于不分明集的不分明边界

〔41〕 胡诚明 一类不分明扑拓空间 I，Ⅱ

模 糊 集*

L·A·Zadeh

模糊集是具有连续隶属度的集合。这样的集合用隶属（特征）函数来阐述，该函数对每一客体分配一个值域是〔0，1〕的隶属度。象并，交，补，关系，凸度等等所包含的概念被扩展到模糊集上，而且，在模糊集意义下建立了这些概念的各种性质。特别是在勿须要求模糊集是离散的情况下证明了凸模糊集的分离理论。

I 引 论

通常，在实际的物理空间里所遇到的客体类没有清楚地定义隶属的标准。例如，动物类无疑是包含狗、马、鸟、等等，而不包含石头、液体、工厂等等客体。然而，象海盘车（Starfish），细菌等等这样的客体相对于动物类而言是含糊的。同样的含糊也出现在数字的情况，例如，10是否属于比1大得很多的所有实数“类”，是含糊的。

显然，“所有比1大得多的实数类”或“美丽的女人类”或“高个子人类”，这些类就其数学意义而言不能去构造一些类或一些集合。到目前为止，在人类的思想范畴内，特别是到模型识别，信息传输和“抽象”的领域里这种不明确“类”的定义起了重要的作用。

本文的目的在于用初步的方法来研究一些基本性质以及概念的含义，如果这些概念可以用来处理以上所引用的类的话。上述的概念是指模糊集[1]的概念，即，它是具有闭连集的类的隶属度。正如以后我们将看到的。模糊集的概念为概念的结构（Framework）构成提供了适宜的起点，在许多方面概念的结构类似于普通集合所使用的概念的结构，但是前者比后者更为普遍，并且可以有力地证明它具有比较宽阔的适用范围，特别是在图象分类和信息加工领域里。本质上来说，这样的结构为处理一些问题提供了自然的方法，在这些问题中不明确的原因与其说是随机变量的出现，不如说是缺乏类隶属的明显的定义准则。

我们用几个基本的定义来开始讨论模糊集。

（1）这些概念在“现代分类”的一类问题阐述中的应用是在 RAND Memorandum RM—4307—PR“抽象概念和图象分类”里所描述。

作者是 R.Bellman, R.Ralabaand L, A.Zadeh 1964。

Ⅱ 定 义

令 X 是一个点（客体）（Object）的空间，用 x 表示 X 的一个普通元素，于是，$X=\{x\}$。

X 的一个模糊集（类）通过一个隶属（特征）函数 $f_A(x)$ 来阐述，$f_A(x)$ 使 X 内的每一点[1]与区间〔0，1〕[2]内的一个实数相对应，用点 x 的$f_A(x)$的值来表示 A 内 x的

*：本文是为了方便读者由别的译文集转载。转载时征得原译者同意。但译名未作统一。

隶属度（The“Grade of membership”）。因而，$f_A(x)$的值越是接近于1，A内x的隶属度就越大。当A是通常意义下的集合时，它的隶属函数仅仅能取0和1两个值，$f_A(x)=1$或者$f_A(x)=0$取决于x属于或不属于A。因此，在这种情况下$f_A(x)$成为我们所熟悉的集合A的特征函数（当有需要区别普通集和模糊集时。只有二个值的特征函数的集合（特征函数的定义域）将被认为是普通集或简单集）。

例：令X是实轴R^1，以及令A是"比1大得很多的"数的模糊集。然后，我们就能够用指定的$f_A(x)$给出A的明确的特征作为R_1上的函数。这样的函数所表示的值可以是：

$f_A(0)=0$；　　$f_A(1)=0$；　　$f_A(5)=0.01$；

$f_A(10)=0.2$；　　$f_A(100)=0.95$；　　$f_A(500)=1$。

应该注意，当X是可数集时，虽然模糊集的隶属函数与概率函数有些相似（或者当X是闭连集时，与概率密度函数相类似），但是在这些概念之间存在着本质上的区别，以后一旦建立起隶属函数所具备的规则和它们的性质时，这些区别将显得比较清楚了。事实上，模糊集的概念根本不是统计学的概念。

围绕以包括模糊集的几个定义作为我们的开始，这些定义是普通集合上相应定义的明显开拓。

一个模糊集是空的当且仅当它的隶属函数在X上恒等于零。

两个模糊集A与B相等（记作A＝B）当且仅当对所有的$x\in X$，$f_A(x)=f_B(x)$成立。（以后，我们将更简单地写成$f_A=f_B$，以此来代替"$f_A(x)=f_B(x)$ 对所有的$x\in X$"）。

A^1表示模糊集A的补集，而且定义为

$$f_A'=1-f_A。\qquad (1)$$

正如普通集合一样，"包含"的概念在模糊集的情形中也起了重要的作用，这个概念和有关的"并"和"交"的概念定义如下。

包含。B包含A（或者等价地说，A是B的子集，或者A小于等于B）当且仅当$f_A\leqslant f_B$。用符号表示为：

$$A\subset B \iff f_A\leqslant f_B \qquad (2)$$

并。分别相应于隶属函数$f_A(x)$和$f_B(x)$的模糊集合A与B的并是模糊集C，记作$C=A\cup B$。集合C的隶属函数通过

$$f_C(x)=\max\{f_A(x),\ f_B(x)\} \qquad x\in X \qquad (3)$$

与A和B的隶属函数联系起来。

或者简写为

$$f_C=f_A\vee f_B。\qquad (4)$$

注意：∪具有结合律的性质，即

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C。$$

注解：更直观地定义并的方法如下：

A和B的并都包含A与B的模糊集之最小者。更明确地说，如果D是皆包含A与B之任一模糊集，则D亦包含A和B的并。

证明这个定义等价于（3），首先，我们注意到用（3）定义的集合C皆包含了A与B，

$$\max\{f_A,\ f_B\}\geqq f_A \qquad 和 \qquad \max\{f_A,\ f_B\}\geqq f_B$$

因为此外，如果D是包含A，B二者的任一模糊集，则

$$f_D \geqslant f_A \qquad f_D \geqslant f_B$$

因此得到

$$f_D \geqslant \max\{f_A, f_B\} = f_C$$

这意味着 $C \subset D$，证明完毕

我们可以用类似的方法定义模糊集交的概念。特别是：

交：分别相应于隶属函数 $f_A(x)$ 和 $f_B(x)$ 的模糊集 A 和 B 的交是一个模糊集C。记作 $C = A \cap B$，

C 的隶属函数通过

$$f_C(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}, \quad x \in X \qquad (5)$$

和 A 与 B 的隶属函数联系起来。简写形式为

$$f_C = f_A \wedge f_B$$

正如并的情况一样，容易证明 A 和 B 的交是包含在 A 里又包含在B 里的模糊集之最大者。与普通集合一样，如果 $A \cap B$ 是空的，则 A 和 B 是不相交的。注意∩与∪一样具有结合律的性质。

图 1 说明了在 R^1 上两个模糊集的交与并。并的隶属函数包含在曲线段 1 和 2 内；交的隶属函数包含在段 3 和段 4 内

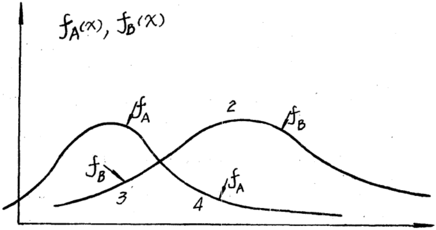


图 1　在R^1中模糊集合的并与交的图示

注解：要注意"属于"的概念在普通集合中起了主要的作用，而在模糊集里则不起同样作用，因此，离开了 $f_A(x)$ 确实存在着这点来谈点 x（属于）模糊集 A 是没有意义的。更详细一点说，我们能够引出两个水平 α 和 β（$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$\alpha>\beta$），这才可以说：

（1）如果 $f_A(x) \geqslant \alpha$，则"x 属于 A"。

（2）如果 $f_A(x) \leqslant \beta$，则"X 不属于 A"。

（3）如果 $\beta < f_A(x) < \alpha$，则"χ 相对于 A"而言处于不确定状态。

这里，用三个真值：$T(f_A(x)\geqslant\alpha)$、$F(f_A(x\leqslant)\beta)$ 和 $U(\beta<f_A(x)<\alpha)$ 导出了三值逻辑（Kleene, 1952）。

（1）更一般地说，$f_A(x)$ 的定义域可以限制为 X 的子集。

（2）在更一般的集合里，隶属函数的值域能够取合适的、部分有序集合 P，按照我们的意图，把 f 的值域限制在单位区间是合适的和足够的，如果 $f_A(x)$ 的值表示成真值，这后者的情况相应于一个具有〔0，1〕区间上真值的连续集的多值逻辑。

Ⅲ ∪、∩和补的一些性质

由（3），（5）和（1）所定义的并，交和补的运算，普通集合上所具有的许多基本性质很容易扩展到模糊集上。例如，我们有

$$\left.\begin{aligned}(A\cup B)'&=A'\cap B' \quad (7)\\ (A\cap B)'&=A'\cup B' \quad (8)\end{aligned}\right\}\text{De Morgan 律}$$

$$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B) \tag{9}$$

$$C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B) \tag{10}$$

按照对于 A，B，C 的隶属函数所相应的关系式是一致的说法，这些等式和类似的等式很容易建立起来。例如，在（7）式的情况下，我们有

$$1-\max[f_A,\ f_B]=\min[1-f_A,\ 1-f_B] \tag{11}$$

用两种可能的情况：$f_A(x)>f_B(x)$ 以及 $f_A(x)<f_B(x)$ 去查证是容易证明上式为恒等式。

类似(10)的情况中，f_A，f_B 和 f_C 的相应关系式是：

$$\max[f_C,\ \min[f_A,\ f_B]]=\min[\max[f_C,f_A],\ \max[f_C,\ f_B]]\cdots\cdots(12)$$

根据所考虑的以下六种情况能够证明上式是恒等式，

$f_A(x)>f_B(x)>f_C(x)$　$f_A(x)>f_C(x)f_B(x)$　$f_B(x)>f_A(x)>f_C(x)$

$f_B(x)>f_C(x)>f_A(x)$　$f_C(x)>f_A(x)>f_B(x)$　$f_C(x)>f_B(x)>f_A(x)$

从本质上来说，X 上的模糊集构成了具有 0 和 1 的分配格。（Birkhoff, 1948）

并和交的说明（解释）

在普通集合情况中，一系列集合 A_1，$A_2\cdots\cdots A_i$，$\cdots\cdots A_n$ 经过∪和∩而得到的族可用集合C来表示，它描述了开关 $\alpha_1\cdots\cdots$，α_n 的网络，用 $A_i\cap A_j$ 和 $A_i\cup A_j$ 分别相应于 α_i 与 α_j 的串联和并联的组合。在模糊集的情况中，我们能够用"筛子"的术语来给出类似的描述。明确地说，令 $f_i(x)$，$i=1\cdots$，n，表示集合 A_i 在点 X 的隶属函数的值。把 $f_i(x)$ 与带有筛孔大小为 $f_i(x)$ 的筛子 $S_i(x)$ 联系起来，从而，$f_i(x)\vee f_j(x)$，$f_i(x)\wedge f_j(x)$ 分别相应于 $S_i(x)$，$S_j(x)$ 的并联和串联的组合。正如在图2里所说明的。

更一般地说，包含 A_1，$\cdots\cdots A_n$，∪，与∩的"井"格式的表示对应于筛 $S_1(x)$，$\cdots$，$S_n(x)$ 的一个网，对于开关电络通过常规综合技术就能求出这样的网。例如一个非常简单的例子，

$$C=[(A_1\cup A_2)\cap A_3]\cup A_4 \tag{13}$$

相应于图3所说明的网。

要注意，依赖于 X 的网中筛的筛孔大小和这个网作为一个整体来说等价于筛孔大小为 $f_c(x)$的一个单独的筛。

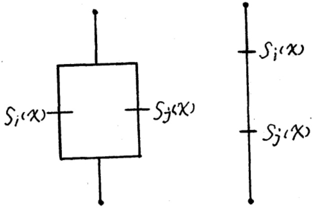


图2　相当于∪和∩的筛的并、串联

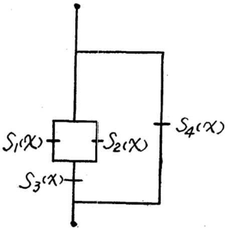


图3　相当于$\{[f_1(x)\vee f_2(x)]\wedge f_3(x)\}\vee f_4(x)$的筛的网络

Ⅳ　在模糊集上的代数运算

除了并和交的运算之外，我们能够定义一些其他方法来形成模糊集的组合以及使它的彼此之间建立联系。这些方法中比较重要的在以下叙述。

代数积[1]。用 AB 表示 A 和 B 的代数积，而且依据 A，B 的隶属函数，通过关系式

$$f_{AB}=f_A f_B \tag{14}$$

来定义。

显然，

$$AB \subset A \cap B。 \tag{15}$$

代数和[1]。用 $A+B$ 表示 A 与 B 的代数和，并且，若是 f_A+f_B 小于或等于 1，则用

$$f_{A+B}=f_A+f_B \tag{16}$$

来定义它。因而，它是不同于代数积的，仅仅当 $f_A(x)+f_B(x)\leqslant 1$ 的条件对所有的 x 满足时，代数和才是有意义的。

绝对差。用 $|A-B|$ 表示 A 与 B 的绝对差，且用

$$f|A-B|=|f_A-f_B|$$

来定义。注意在普通集的情况中 $|A-B|$ 归结为 $A\cup B$ 区域里 $A\cap B$ 的补。

凸组合。两个向量 f 和 g 的凸组合通常是指具有 $\lambda f+(1-\lambda)g$ 形式的 f 和 g 的线性组合，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$。这种 f 和 g 组合的模式能用下述方法推广到模糊集。

令 A，B，和 Λ 是任意的模糊集。用（A，B；Λ）表示A，B 和 Λ 的凸组合，且用关系式

$$(A,\ B;\ \Lambda)=\Lambda A+\Lambda' B \tag{17}$$

来定义它，这里 Λ' 是 Λ 的余。对于隶属函数 (17) 可写为

$$f_{(A,\ B;\ \Lambda)}(x)=f_\Lambda(x)f_A(x)+[1-f_\Lambda(x)]f_B(x) \qquad x\in X \tag{18}$$

A，B 和 Λ 凸组合的基本性质可表示为

$$A\cap B\subset(A,\ B;\ \lambda)\subset A\cup B。 \tag{19}$$

对所有的 λ 这个性质是不等式

$$\min[f_A(x),\ f_B(x)]\leqslant\lambda f_A(x)+(1-\lambda)f_B(x)\leqslant\max[f_A(x),\ f_B(x)], \quad x\in X \tag{20}$$

的直接结果，上式对所有的 $\lambda\in[0,1]$ 成立。给出模糊集 C 使其满足 $A\cap B\subset C\subset A\cup B$，我们总是能求出一个模糊集 Λ 使得 C =（A，B；Λ），看到这一点是有益的。用

$$f_\Lambda(x)=\frac{f_C(x)-f_B(x)}{f_A(x)-f_B(x)}, \qquad x\in X \tag{21}$$

给出 Λ 集的隶属函数。

模糊关系。关系的概念（函数概念的推广）可以自然的开拓到模糊集，而且对模糊集理论及其应用起了重要的作用。以后，我们将只定义模糊关系的概念且谈到一些有关的概念。

通常，一个关系定义为有序对的集合（Halmos 1960）即，所有 $x\geqslant y$ 的实数有序对 x 与 y 的集合。就模糊集而言，x 上的模糊关系（A Fazzy relation）是乘积空间 $X\times X$ 上的模糊集。例如，这关系用 $x>>y$ 表示，x，$y\in R^1$，可以把它认为是在 R^2 上的且具有 A 的隶属函数 $f(x,y)$ 的模糊集A，它存在着下列（主观的 Subjeitve）描述值：

$f_A(10,\ 5)=0$；$f_A(100,\ 10)=0.7$；$f_A(100,\ 1)=1$；等等。

更一般地说，我们能够把 X 上 n——维模糊关系定义为乘积空间 $X\times X\times\cdots\cdots X$ 上的一个模糊集合 A。对这样的关系，隶属函数是 $f_A(x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n)$　其中 $x_i\in X$，$i=1、2，\cdots\cdots n$。

在二元的模糊关系中，用B A表示两个模糊关系的合成（Composition），它的隶属函数通过下式与A，B的隶属函数建立联系，

$f_{B\circ A}(x,y)=\sup_{v}\min[f_A(x,v),f_B(v,y)]$。注意合成的运算具有结合律。

$A\circ(B\circ C)=(A\circ B)\circ C$。

由映射导出的模糊集（Fuzzy Sets Induced by mappings）令T是从X到空间Y的映射。令B是Y上具有隶属函数$f_B(y)$的模糊集。逆映射T^{-1}导出了X上的一个模糊集A，它的隶属函数用下式定义，

$$f_A(x)=f_B(y),\qquad y\in Y \tag{22}$$

在X上对所有的用T把它映射到y的x成立。

现在考虑一个相反的问题，如果给出了X上的一个模糊集A和映射T，如前所述，T是X到Y的映射。这个问题是：由映射T导出了Y上的模糊集B，它的隶属函数是什么呢？

如果T不是一一对应的，当两个或者更多的X上的在A中具不同的隶属度不同点，比如说x_1和x_2，它被映射到Y中同一个点y，于是就出现了含糊性。在这种情况下，这问题是：在B中y有多大的隶属度？

解这个含糊性，我们约定把两个隶属度之较大者分配给y。更一般地，B的隶属函数将用

$$f_B(y)=\max_{x\in T^{-1}(y)} f_A(x),y\in Y \tag{23}$$

定义：这里$T^{-1}(y)$是X中的集合，如果T把该集合映射到Y内。

（1）二元的代数积是和$A\oplus B=(A'B')'=A+B-AB$（由T.Cover指出这点）。注意普通集合∩与代数积是等价的运算，正如∪和⊕一样。

V 凸 性

正如以后将看到的，用保持普通集的凸性所具有的许多性质的这种方法能够容易地把凸性的概念开拓到模糊集上。包括在图象分类，优化和有关问题等等的应用中，这个概念的出现是特别有用的。

在下文中，我们具体假设X是实欧几里得空间E^n。

定义：

凸性：

模糊集A是凸的，当且仅当用下述定义的集合对于所有的$\alpha\in[0,1]$而言是凸的。

$$\Gamma\alpha=\{x|f_A(x)\geqq\alpha\} \tag{24}$$

一个可选择的而且更为直接的定义如下[1] A是凸的当且仅当

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\}\geqslant\min\{f_A(x_1),f_A(x_2)\} \tag{25}$$

对所有x_1，$x_2\in X$以及对所有的$\lambda\in[0,1]$成立。注意，这个定义并不意味着$f_A(x)$必须是x的凸函数，这点说明见图4 n=1的情况。

说明上述二者定义之间的等价性要注意到如果A在第一个定义之下是凸的，且有

$\alpha=f_A(x_1)\leqslant f_A(x_2)$，

则由$\Gamma\alpha$的凸性定义得出$x_2\in\Gamma\alpha$和$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\Gamma\alpha$。因此，

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\} \geq \alpha = f_A(x_1) = \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}。$$

相反地，如果 A 在第二个定义之下是凸的，而且 $\alpha = f_A(x_1)$，则可以把 $\Upsilon\alpha$ 看作为所有满足 $f_A(x_2) \geq f_A(x_1)$ 的点之集合。由于(25)，具有形式 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 的每个点也在 $\Gamma\alpha$，因此 $\Gamma\alpha$ 是凸集，证毕。

用下面的定理表示凸模糊集的基本性质

定理：如果 A 和 B 是凸的，则交集也是凸的。

证明：令 $C = A \cap B$，因而有

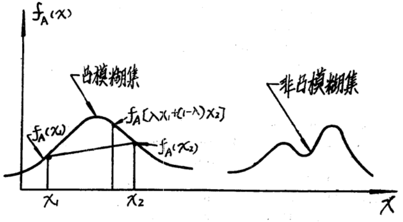


图4　在 E^1 上凸和非凸模糊集

$$f_C[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]$$
$$=\min\{f_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2],\ f_B[\lambda x_1+(1-\lambda x_2)\} \quad (26)$$

现在，由于 A 和 B 是凸的，

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\} \geq \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\}$$
$$f_B\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \geq \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\} \quad (27)$$

因此

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\} \geq \min\{\min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)\},\ \min\{f_B(x_1),\ f_B(x_2)\}\} \quad (28)$$

或者等价地

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\} \geq \min\{\min\{f_A(x_1),\ f_B(x_1)\},\ \min\{f_A(x_2),\ f_B(x_2)\}\} \quad (29)$$

则

$$f_C\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\} \geq \min\{f_C(x_1), f_C(x_2)\} \quad (30)$$

证毕。

有界性

一个模糊集 A 是有界的，当且仅当对所有的 $\alpha > 0$，集合 $\Gamma\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ 是有界的。即，对每一 $\alpha > 0$，存在有限值 $R(\alpha) > 0$，使得对所有的 $x \in \Gamma\alpha$，都有 $\|x\| \leq R(\alpha)$ 成

立。

如果 A 是有界集，那么对任一$\varepsilon>0$，则存在一个超平面 H 使得 $f_A(x)\leqslant\varepsilon$在H不包含原点的一侧上的所有 x 都成立。

例如：考虑集合 $\Gamma_\varepsilon=\{x|f_A(x)\geqslant\varepsilon\}$，按照假设，这个集合被包含在半径为$R(\varepsilon)$的球里。令H是所假设的任一超平面，因而不包含原点的超平面H之一侧上所有的点都处 在外侧或球上，因此所有这样的点有 $f_A(x)\leqslant\varepsilon$成立。

引理：令 A 是一个有界模糊集，又令 $M=\sup_x f_A(x)$（M 将被称为 A 的最大度 The maximal grade)。则至少存在一个点 x_0，使得就下述意义而言在 x_0 是“基本达到”上确界M，即，对每一$\varepsilon>0$，对每一个 x_0 的球形领域包含了集合
$Q(\varepsilon)=\{x|f_A(x)\geqslant M-\varepsilon\}$的点。

证明[1]：考虑有界集的嵌套序列 Γ_1，Γ_2，……，这里 $\Gamma_n=\{x|f_A(x)\geqslant M-M/(n+1)\}$，$n=1，2$……。注意对于所有有限的 n，$\Gamma_n$是非空的，正象用 $M=\sup_x f_A(x)$定义M的理由一样。

令 x_n是Γ_n里（n＝1，2，……）任意选择的点，则 x_1，x_2，……是有解闭集 Γ_1 里点的序列。按 Bolzano——Weierstrass 定理，这个序列在Γ_1 里至少存在一个极限点。比如 Γ_1 中的x_0。因此 x_0 的每一球形邻域将包含了序列 x_1，x_2，……的无穷多个点，而更特殊地，包含了子序列 x_{N+1}，x_{N+2}，…… 的无穷多个点，这里 $N\geqslant M/\varepsilon$。因此，这些子序列的点落在集合 $Q(\varepsilon)=\{|f_A(x)\geqslant M-\varepsilon\}$里，引理证毕。

严格的和强的凸（Sterit and strong Conoexity）

一个模糊集 A 是严格的凸，如果集$\Gamma\alpha$，$0<\alpha\leqslant1$，是严格凸的（即，如果在$\Gamma\alpha$里任意两个不同的点之中点位于 $\Gamma\alpha$ 内部）。注意，当 A 是普通集时，这个定义归结为普通集的严格的凸定义。

一个模糊集 A 是强凸的，如果对于任意两个不同的点以及开区间(0，1)内任一数 λ 有

$$f_A\{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] > \min\{f_A(x_1),\ f_A(x_2)]\ 。$$

注意强凸并不意味着是严格凸，反之亦然。还要注意，如果 A 和 B 是有界的，那么它们的并和交也是有界的。类似地，如果 A 和 B 是严格地（强地）凸的，则它们的交也是严格地(强)凸的。

令 A 是凸的模糊集，又令 $M=\sup_x f_A(x)$。如果 A 是有界的，则如上述，或者 是在某些 x “达到”上确界，比如说是 x_0；或者是至少存在一个点 x_0 使得就下述意 义而 言在 x_0 “基本达到”上确界M，即，对每一$\varepsilon>0$，每一个 x_0 的球形邻域包含了集合
$Q(\varepsilon)=x\{|M-f_A(x)\leqslant\varepsilon\}$的点。特别是，如果 A 是强凸的，以及在 x_0 达到上确界M，则 x_0 是唯一的。因为，如果$M=f_A(x_0)$和$M=f_A(x_1)$，这里 $x_1\neq x_0$，则当
$x=0.5+0.5x_1$ 时，有 $f_A(x)>M$，这与$M=\max f_A(x)$发生矛盾。

更普通的，令 C(A)是X中能“基本达到”上确界M的所有点之集合，我们把 这个集合称为A的核心（Core）。在凸模糊集的情况，我们能够断定 C(A)的下列性质。

定理：如果 A 是凸模糊集，则它的核心是个凸集。

证明：

如果在x_0和x_1 基本达到上确界M；$x_1\neq x_0$，则具有形式为$x=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$的所有点 x 上也是基本达到上确界M的。

最后，令 P 是以 ε 为半径，经过 x_0 和 x_1 的连线为轴的圆柱形。令 x_0^1 是半径为 ε，球心为 x_0 的球内的点，x_1^1 是半径为 ε，球心为 x_1 的球内的点使得 $f_A(x_0^1) \geqslant M-\varepsilon$ 和 $f_A(x_1^1) \geqslant M-\varepsilon$ 成立。于是，利用 A 和凸性，对 $x_0^1 x_1^1$ 线段上的任一点 u 我们有 $f_A(u) \geqslant M-\varepsilon$。此外，利用 P 的凸性，在 $x_0^1 x_1^1$ 线段上的所有点将位于 P 内。

现在，令 x 是线段 $x_0 x_1$ 上的在一点，则这个点到线段 $x_0^1 x_1^1$ 的距离必须小于或等于 ε，这是由于 $x_0^1 x_1^1$ 位于 P 内的缘故。因此，一个半径为 ε、球心为 x 的球至少包含线段 $x_0^1 x_1^1$ 一个点，因此至少包含一个点，比如说 ω，使得满足 $f_A(\omega) \geqslant M-\varepsilon$，这就证实了在 x 上基本达到上确界 M，于是定理证毕。

推论。如果 $X=E^1$，以及 A 是强凸的，则基本达到上确界 M 的这种点是唯一的。

模糊集的影（Shadow）

令 A 是 E^n 上的模糊集，其隶属函数为 $f_A(x)=f_A(x_1, \cdots\cdots, x_n)$，为了简化概念起见，A 在超平面 H 上的影（投影）的概念我们将在下面特殊情况——H 是座标超平面，即 $H=\{x \mid x_1=0\}$ 上定义。

特别是 A 在 $H=\{x \mid x_1=0\}$ 上的投影定义为在 E^{n-1} 上的模糊集 $S_H(A)$，其隶属函数 $f_{S_H(A)}(x)$ 用 $f_{S_H(A)}(x_2 \cdots\cdots x_n)=\sup_{x_1} f_A(x_1 \cdots\cdots x_n)$ 给出。注意这个定义与 (23) 是一致的。

交 A 是凸模糊集时，$S_H(A)$ 的下列性质是上面定义的直接结果：如果 A 是凸模糊集，则它在任一超平面上的投影也是模糊集。

两个凸模糊集的投影的一个重要性质是用以下结论表示的。

$$S_H(A)=S_H(B) \quad \text{对所有 } H \Rightarrow A=B。$$

为了证明这点[2]，只要证明下述结论就足够了，如果存在一个点，比如 x_0，满足 $f_A(x_0) \neq f_B(x_0)$，则存在一个超平面 H 仅得 $f_{S_H(A)}(x_0^*) \neq f_{S_H(B)}(x_0^*)$，这里 x_0^* 是 x_0 在 H 上的投影。

假设 $f_A(x_0)=\alpha > f_B(x_0)=\beta$，由于 B 是凸模糊集，则集 $\Gamma_\beta=\{x \mid f_B(x)>\beta\}$ 是凸的，因此存在一个支撑 Γ_β 的超平面 H，并且 H 通过 x_0。令 H 垂直于 F，又令 x_0^* 是 x_0 在 H 上的投影，于是因为 $f_B(x) \leqslant \beta$ 对 F 上的所有 x 成立，则我们有 $f_{S_H(B)}(x_0) \leqslant \beta$。另一方面，$f_{S_H(A)}(x_0^*) \geqslant \alpha$。从而 $f_{S_H(B)}(x_0^*) = f_{S_H(A)}(x_0^*)$。而且可以类似明证 $\alpha<\beta$ 的情况。

以上的推断更一般化的形式如下。令 A 是凸模糊集，但必须不是 B，又令 $S_H(A)=S_H(B)$ 对所有的 H 成立，则 $A=\text{Conv } B$。这里 Conv B 是 B 的凸壳。即包含 B 的最小凸集。更一般地，$S_A(A)=S_H(B)$ 对所有的 H 成立，它意味着 $\text{Conv } A=\text{Conv } B$。

凸模糊集的分离。（Separation of Convex Fuzzy sets）

普通凸集的古典分离理论主要地陈述为：如果 A 和 B 是分离的凸集，则存在一个分离超平面 H，使得 A 在 H 的一侧而 B——在 H 的另一侧上。

自然要探讨一下，是否能把这个理论开拓到模糊凸集，而不要求 A 和 B 是不相交的条件，因为在模糊集的情况里不相交的条件太受限制了。以后我们将看到，这个问题的问答是肯定的。

我们必须建立一些定义作为准备。特别是，令 A 和 B 是两个有界的模糊集，令 H 是 E^n 用等式 $h(x)=0$ 定义的超平面，满足 $h(x) \geqslant 0$ 的所有点在 H 的一侧。而满足 $h(x) \leqslant 0$ 的所有点在 H 的另一侧[3]。令 K_H 是依赖于 H 的数，使得在 H 的一侧有 $f_A(x) \leqslant K_H$，而在 H 的另一侧有 $f_B(x) \leqslant K_H$。令 M_H 是 $\text{Inf} K_H$。则数 $D_H=1-M_H$ 被称为 A 和 B 用 H "分离的度"

(the degree of separation of A and B By H)

一般说来，D_H 与给定的超平面H无关，但是，它与 $\{H_\lambda\}$ 族有关，带下标 λ 的H_λ 排列在上面，比如说，排列在 E^n上。于是，这个问题在于求出这个族中的一个使得能够实现最大可能的分离度。

这个问题的特殊情况是，H_λ 是 E^n 上的超平面，带下标 λ 的H_λ 是排列在 E^n 上，在该情况下，我们用关系式 $D = 1 - \overline{M}$ (31)

定义A和B的"分离度"。上式中 $\overline{M} = \text{Inf } M_H$ (32)

为简单起见下标 λ 省略了。

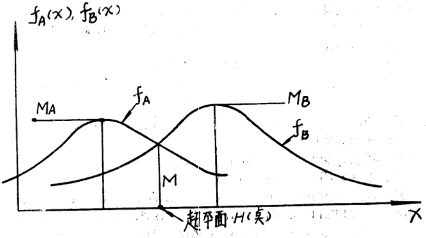


图5　在 E^1 上对于模糊集分离理论的图示

与 D 有关的各种论断当中，以下所阐述的实际上是分离理论在凸模糊集上的开拓[4]。

定理：令A和B是 E^n 上有界的凸模糊集，其最大度(Maximal grades)分别是 M_A 和M_B $\{M_A = \sup_X f_A(x),\ M_B = \sup_X f_B(x)\}$。令M是交 $A \cap B$ 的最大度 $(M = \sup_X \min\{f_A(x),\ f_B(x)\})$，则 $D = 1 - M$。

注解：简单地说，这个定理说明用 E^n 上的超平面能够达到两个模糊凸集 A 和 B的最大的分离度的值为 1 减去交 $A \cap B$ 的最大度。这就是在图 5 $n = 1$ 所说的。

证明：

分别地考虑下述两种情况是比较方便的。(1) $M = \min(M_A, M)$ 和(2) $m < \min(M_A, M_B)$。注意后一种情况排除了 $A \subset B$ 或 $B \subset A$。

情况 1：我们具体地假设 $M_A < M_B$，那么 $M = M_A$，由有界集的性质我们已经说明了存在一个超平面H，使得 $f_B(x) \leqslant M$对H一侧的所有 x 成立。而在H的另一侧有 $f_A(x) \leqslant M$，因为对所有 x，有 $f_A(x) \leqslant M_A = M$成立。

尚需证明不存在一个$M' < M$，以及不存在一个超平面H使得在H'的一侧$f_A(x) \leqslant M'$，而在H'的另一侧有 $f_B(x) \leqslant M'$。

由以下所述立刻推出这点。假设H'和M'存在，而且具体地假定A 的核心（即在该集合

的点上基本达到上确界 $M=M_A$）是在H'的正侧。这点排除了$f_A(x)\leqslant M'$在H'正侧成立的可能性，因此必须是$f_A(x)\leqslant M'$，对H'的负侧上的点成立，而且对H'正侧的所有点x有$f_B(x)\leqslant M'$成立。所以，在H'正侧的点x都有

$$\sup_X \min\{f_A(x), f_B(x)\}\leqslant M',$$

并且对H'负侧的所有点x也一样成立。这意味着整个X中的点x都满足

$$\sup_X \min\{f_A(x), f_B(x)\}\leqslant M'。$$

这与假设 $\sup_X \min\{f_A(x), f_B(x)\}=M>M'$ 矛盾。

情况2：考虑凸集 $\Gamma_A=\{x|f_A(x)>M\}$ 和 $\Gamma_B=\{x|f_B(x)>M\}$。它们是非空的和不相交的集合，因为若不是这样的，则就得有一个点，比如说是y，使得$f_A(u)>M$与$f_B(u)>M$都成立，因此有$f_{A\cap B}(u)>M$，与假设$M=\sup_X f_{A\cap B}(x)$矛盾。

因为Γ_A和Γ_B是不相交的，按照普通集合分离理论则存在一个超平面H，使得Γ_A是在H的一侧（比如说是正侧）和Γ_B是在H的另一侧（负侧）。而且，根据Γ_A和Γ_B的定义，对在H负侧的所有点有$f_A(x)\leqslant M$，以及对在H正侧的所有点有$f_B(x)\leqslant M$。

于是我们证明了存在一个把$1-M$作为A和B的分离度的超平面H，从情况1给出的论证得出：这个结论不能认为是A和B的最大的分离度。这就完成了定理的证明。

看来，凸模糊集分离定理与模型识别问题是密切相关的。对这类问题以及优化问题的应用在稍后关于模糊集和它们的性质的著作里将予以探讨。

Received: November 30, 1964。

---

(1)此证明由A.J.Thomasian 所提出。

(2)此证明是建立在G.Dantzig 对于A和B是普通凸集的情况所提出想法的基础上。

(3)注意所述的一些点集通常地包括了H。

(4)这个阐述是建立在E.Berlekamp 提出的基础之上。

参 考 文 献

BIRKHOFF, G, (1948), "Lattice Theory", Am, Math. Soc. Collo g. publ, Vol.25, New york.

HALMOS, P.R, (1960), "Naive Set Theory", Van Nostrand. New york.

KLEENE, S.C.(1952), "Introduction to Me ta mathematices", P. 334 Van Nostrand. New york.

译自《Inform ation and Control》8.P 338—353, 1965。

（耿春仁 译，沈镜心 校）

L— 不 分 明 集

J. A. Goguen

这篇文章是 Zadeh [1]和[2] 的继续 和 推 广，并且探讨它的基础。大概最重要的推广要算单位区间之外序结构的考虑。由于这点我们能够把新观点应用到最优化问题上，这个推广的意义更多地表现在它的观点，而不是任何一个特殊的具体结果，这 个 理论仍 然是 年轻的，无疑许多概念必须叙述，然而必须采取其最终形式。但是现在就可以看得见这个理论的轮廓。

在不分明集的整个发展过程中，模型分类起着一个基本的作用，其中一个理由就是发现概率论对处理模型分类时所出现的不确定类是不适用的；这个不确定 性比 之统 计变 差更含糊。

类似的困难出现于相当广泛的一类问题中，人们企图对这类问题应用概率论，但是要估计其中假定包含的分布是困难的或不可能的，并且关于统计假设（独立性，等等）存在不确性，或者多少参数可以抹煞，可以取定都难以估计，在这些情形，概率论的主要作用是部分地辨明直观过程，并提供那些过程有用，或提供某类方法以分辨事物的性质，我们相信不分明集至少应能起到这些作用。

让我们考察某些特殊的例子，一个主妇在她的食品铺里面临着一个非常典型的最优化问题：在所有可能的食品包里她必须选出一个，这就遇到各种可能的不相容的最优化标准，如价格，营养价值，量，和多样性，这些包的偏序是这个问题的一个内在量。

考察一种读打字机打的符号的机器，这种机器计算各种模型光电印刷装置的相互关系，并且抽出一定的“特点（feature）”，字母“A”的实际样品 可以 产生 这些 标准 的各种值，企图探侧“A”的这些标准中的某些个可以是互相冲突的，产生多义性，没有非常好的方法去决定是否某符号就是“A”，这样一来，想看作是A的符号所构成的集 合就是一个不分明集，即没有明确边界的集，不分明性表现了这个问题的本质。

最优化的偏序和不分明多义性是许多问题的特征，这样的问题在下述意义下是病状的，他们不容许唯一解；事实上，他们在通常意义下；可以完全没有解，不分明集论研究这种病态问题和病态集的形式上的性质，其中许多类似于通常集的性质。

所谓“硬科学”，如物理，找寻他们值得注意的东西之间的有力关系（与不分明相反），对于所谓“软科学”（生物学，心理学，等等）可以包含寻找变量之间的不分明关系；即使这些变量可能是不分明的，我们发展不分明关系的理论，并讨论某些应用，特别是，不分明关系使人们去研究不分明系统。

不分明性比之工程设计问题中的意外情形是较有规则的：通常没有完全确定的最好解或方案；用增加价格，业务困难等等来增加速度，紧性或效率。通常的方法（不同于抹煞偏序或应用直观)是选用对各种设计参数的半任意“加重因子”(semiarbitrary “weighting

factors”），并选用具有最大总“重量”的最好系统，这个方案的意义和证明它的正确性是不清楚的，它只不过是一种方法，按照这种方法“加重因子”能被选定；但是直观方法是更不清楚的，不分明集对所提出的问题能发生效力，并且能弄清楚各种作用，包括加重的作用。

我们给出一个预备定义：不分明集是一个集连同到一个传递偏序集函数（今后叫做偏序集）；所以不分明集是一类广义特征函数，我们习惯以 L 记偏序集，并且把不分明集叫做 L—不分明集或 L—集，由于数学定义的一般性，不分明集某些重要的应用不包含不分明性的所有直观概念。

偏序集的使用给予这个理论一种专门的特性，即强调序理论的命题，为此提出一个不分明集的极大值和极小值是什么，偏序集一般地应当至少是一个完备格、分配性也是有用的。

把不分明集看作非单序的有用函数是有帮助的，那么能够看到，这个理论与统计判定问题有关。例如，我们可以把偏序集看作是一个判定语言，即能由逻辑运算“and”和“or”（或“min”和“max”）决定的判定或赋值的一个空间。

某些问题本来就有多分量最优化标准作为公式，但要求在 poset｛是，否｝=｛1，0｝内求解、为了求解，我们把一个 poset 映到另一个；如果还是保序映照就更好，即它是一个序结构的同态映照，例如，前面描述的加重过程（weighting process）是由 R^n（具有乘积序）到单序集 R 的一个同态。

单序集的乘积在应用上是特殊的公有偏序集并且是特殊的自然数学，虽然，在某些应用中更多的外来格可以被找到，在模型分类问题中，K 模型判定和它们的逻辑结合可以构成我们的判定语言

虽然我们考察的问题对某些应用可能是重要的，但它们不包含太大的数学深度，这篇文章给出基本语言和一些初等性质，主要形式和代数，并准备新观点，但是存在较大数学深度的题目，这些包含不分明集的信息论，凸不分明集，各种数学结构的不分明化，和模型分类问题的更详细地处理。我们希望今后考察这些题目中的一些。

这篇文章中，我们并不区分哲学的，应用数学的和纯粹数学的过程，我们认为大多数主要论断易受所有这三方面的影响。

我们产生现代纯数学框架内的一种“不精确量的逻辑”；有关不分明集的结果可以作为严格的数学定理被证明，我们仍旧以“不精确量”来看待这些结果，这是纯粹数学应用到某些哲学和实际问题的结果，所以它是应用数学的命题。

不必知道特殊的不分明集作为精确的数学函数关于它们能够作某些理论特征的断言，这些断言可以有哲学的和/或实际的意义。

我们的结果，态度和方法可能产生一些基础上的问题，用精确性的逻辑去建立不分明性的逻辑哲学上有些不满意；它似乎应祈求于独立的公理系统、一另方面，我们的方法表明如果我们所使用的数学是协调的，那么它便是不分明的，正象我们系统阐述的那样。

我们已经利用了公理化方法，因为作为基础的假设是抽象的，特别象 L；这样一来能够确定我们的结果在多大程度上可以应用到某些新问题。

作者感谢 L.A.Zadeh教授关于这篇文章的各种有益的讨论，感谢 Dr.Ralph Mckenzie关于第 6 节的建议。

2. L—不分明集

不分明集的概念处理对一个集 X 的元素有赋值的情形，这些元素可以是打字机字母（叫做特 征），而赋值可以是它们看起来象字母“A”的程度；或者这些是公品包，而赋值是它们对家庭主妇的有用程度（或是“引起注意的程度”，如果人们希望考察主观的赋值）；或者这些元素是行为，而赋值是对应的意外情形或其它结果。

一般地，X 除过是集这个要求之外还有其它的某些结构，虽然在这篇文章中，我们对它不作任何特殊的假设。例如，如果 X 被看作是所有可能的食品包或是一个工厂的产品，等等，习惯上把 $x \in X$ 看作一个向量（在经济学上叫做一个货物包），它的分量是所含各种货 物总数的实数（负的分量例如可表示这个工厂有输入货物的意义），这样 X 便有一个 向量 空 间的结构。

在模型分类中，我们常常关心的是某种机器的产品，这个产品通常是一个向量。例如模型可以化简为 $n \times n$ 方阵，每个给定的方阵具有确定的强度（也许在一个对数 尺上）；一个模型则作为 R^{n^2} 内的一个向量。

如果我们把速度波看作在单位区间上平方可积的函数，则这样的元素作成的集能够作为一个$Hilbert$空间的结构，它们的相互关系是内积（更确切地说，这个空间的元素应当 是函数的等价类），所以对速度看法的这种空间 X 可以看作是一个$Hilbert$空间。

在实际应用中，在 X 上通常有“近（nearness”的一些概念，譬如它是一 个拓扑空间，而不是一个距离空间。

集 X 上的不分明集是 X 上的一类广义“特征函数”，它的“隶属 度”比“是”或“非”更一般。事实上，我们取一个集，此后它的隶属度记为 L，在最优化问 题中，L 可 以 表 示（在 X 内）选择的最优度；在古典问题中，它可以表示在一个模型类中 的隶 属 度，在其它内容里，另外的述语也将出现。

定义，X 上的一个 L—不分明集 A 是一个函数 A：$X \to L$。

这样不分明集看作是相等的，当且仅当作为函数来说它们相等。

如果 X 的元素有一个名称（即，“特征”），A 将叫做这样的元素 的一个 L—不 分明集（即，“A是特征的一个 L—不分明集”）。我们可以去掉前缀“L—”，如果方便的话或者不会混淆的话；或者我们可以去掉“不分明”；但不能同时去掉“L—”和“不 分明”，这也同样适用于其它不分明概念。

我们用记号 XY 表示 X 和 Y 关于集论乘积；即 $XY = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$。$X+Y$ 表示 X 和 Y 不相交的并，而 X^Y 表示 Y 到 X 的所有函数的集，下面关于集论的同 构命题是容易证明的。

命题 1.

$X+Y \cong Y+X$；$X+(Y+Z) \cong (X+Y)+Z$；

$XY \cong YX$；$X(YZ) \cong (XY)Z$；$X(Y+Z)$

$\cong XY+XZ$；$(X+Y)Z \cong XZ+YZ$；

$X^{Y+Z} \cong X^Y Y^Z$；$(XY)^Z \cong X^Z Y^Z$；$(X^Y)^Z \cong X^{YZ}$.

对指数没有结合律，即$X^{(Y^Z)} \ncong (X^Y)^Z$，而当我们写X^{Y^Z}时，意即$X^{(Y^Z)}$，因为X上 所

有L—集的集是L^X，因此在指数表达式中的底集通常是L、L的元素是"值"，而L^L的元是一个"不分明值"。

命题2．L^X能够由L具有的不管什么运算给定，而在L^X内的这些运算将服从在L内有效的任何规律，这些规律是逐点扩张的。

例如，如果一个二元运算$*$定义在L上，它在L^X上引出一个运算$*$使的对$A,B\in L^X$和$x\in X$有$(A*B)(x)=A(x)*B(x)$，如果某个规律，譬如结合律，交换律或等幂律在L上对$*$成立则它也可扩张到L^X上，相约律将不能按类扩张；如果L是一个积分区域，而X多于一类，L^X将是一个环，但相约律不再成立。

这一类能够由泛代数的考查十分精确地作到（参看 Birkhoff [3]），但是这样复杂的作法太不值得了，L^X与乘积$\prod_{x\in X} L_x$相同，X是L的下标集，而这个结构本质上是代数中的"乘积过程"，如果L有一个拓扑结构，L^X能够由积拓扑给定。

L可以是一个半群，一个偏序集，一个格，或一个波雷尔σ—环，在下一节我们将讨论对大多数目的最合适的范畴是完备格或完备格序半群。

对于特殊而重要的格｛0，I｝，这里$0<I$，我们将利用记号$\mathbf{2}$，如果L是具有0和无穷大I的一个格，$\mathbf{2}$将表示子格｛0，I｝，$L=\mathbf{2}$的情形本质上是集论，因为$\mathbf{2}^X$的元素是X的子集的特征函数，$L=J$的情形，这里J是单位闭区间$[0,1]$，是 Zaden [1] 中原始意义下不分明集的特殊情形。

3．L的结构

这一节我们讨论L所满足的公理，并引出满足这些公理的重要例子。一般地，所要求的结构是随着内容变化的。

在大多数应用中，例如在模型分类中，L应当有某种类型的序结构，因为我们希望说"x比y小"，"x比y耗费小"，"x看起来比y更象'A'"，等等。虽然通常已经假定这个序是简单的，我们已经讨论了这通常是不合适的。另一方面，很难想象在至少不满足传递性的序方面能有什么进展。这样L至少应是一个（反身）传递偏序集或偏序集。

在许多例子里，L是单序集的乘积，它以"向量"$a=(a_1,\cdots,a_n)$作为元素，序规定为$a\geqslant b \Leftrightarrow a_i\geqslant b_i$，$i=1,\cdots,n$。这个序叫做积序，此后我们假设所有的乘积都是用这种方法序化的。单序集乘积的最重要性质包含在分配格里，而乘积是完备的如果每个因子是完备的，这可由下面的容易证明的结果得到。

命题1．一个单序集是一个分配格，分配格的乘积是分配的，而完备格的乘积是完备的。

对某些应用来说，这种类型的L似乎是太特殊了。例如，我们可以希望L是一个模型分类问题的判定语言，它容许"是"和"否"的组合，在任何情形下，不分明集的数学理论不依赖于L具有何种特殊形式，但却依赖于某些一般的假设，这是我们现在就要做的。

lub 和 glb（我们分别记作$\vee$和$\wedge$）的存在性问题多少可由下述来阐明：设A是X上的一个L—不分明集，且$Y\subseteq X$，为了方便起见，让我们约定"$a\geqslant b$"意即"a比b好"，在这类问题中我们考查，如果选定某个$x\in Y$，重要的是知道有多少好的或多少坏的东西可能发生，显然我们将作得比$glb\{A(x)|x\in Y\}$好，而比$\mathrm{lub}\{A(x)|x\in Y\}$坏，如果这些

有定义的话；显然 glb和lub 是在一个偏序集内得到界的最合理的方法。

如果一个偏序集对每个非空子集有一个glb和lub，则它是完备格，此后我们假设 L 至少具有这种结构，在某些应用中，我们可以不关心glb，而仅关心 lub，与这种情形有关的代数结构后面将作简短的讨论。

L 的元素的下标族 a_i 的 lub 将写作$\bigvee_i a_i$ 或$\bigvee a_i$，相应地可写 glb，我们有时将利用记号 $\bigvee A=\bigvee\{A(x)\mid x\in X\}$ 和$\bigwedge A=\{A(x)\mid x\in X\}$，如果 L 有 O 和无穷大 I，我们将方便地写$\bigvee\phi=O$和$\bigwedge\phi=I$。

如果 L 没有 O 和 I，不失一般性把它们添加进去，此后我们假设 L 具有 O 和 I，则有可能一个不分明集仅取值 O和 I。

前节的命题2使的 L^X 也有格的结构，即由下述定义给定

$(A\vee B)(x)=A(x)\vee B(x)$和$(A\wedge B)(x)=A(x)\wedge B(x)$，对 $A,B\in L^X$ 和 $x\in X$，在 L 上对$\vee$和$\wedge$的结合律，交换律，等等可延拓到 L^X 上。

L^X 的序规定为，$A\leqslant B$ 当且仅当对所有 $x\in X$，$A(x)\leqslant B(x)$，对 L 成立的许多特殊规律，譬如完备性或分配性，也将延拓到 L^X。

关于格的对偶原理说，如果 L 的一个结果是真实的，那么由交换$\wedge$和$\vee$，$\leqslant$和$\geqslant$所得的对偶结果也是真实的。重要的是这也可延拓到 L^X 上，所以有关于不分明集的对偶原理：如果一个定理或等式对不分明集是真实的，则它的对偶也成立。

这个原理在证明定理和等式时是很省劲的。

根据 $L=2$ 时集论的特殊情形的述语，我们可以称 $A\vee B$ 为 A 和 B 的并，$A\wedge B$ 为 A 和 B 的交，$A\leqslant B$ 读作"A 含于 B"。

关于 L 的另一个假设，——这似乎是很自然的，但却起着重要的技术作用——是分配律。实际上，这个规律在完备格里既不自然也不是很有用的，它以所谓完备分配律的形式出现：

$$a\wedge\bigvee_i b_i=\bigvee_i(a\wedge b_i)。$$

由对偶原理，这个等式等价于它的对偶。满足完备分配律的完备格将叫做完备分配格。

综上所述，我们假设 L 是具有 O 和无穷大元素的完备分配格。

因为一个格关于不论那个格的运算是一个交换半群（所谓半群即是具有满足结合律的二元运算的一个集），所以它满足通常的广义（有限）交换律和结合律（参看[4]第1章）。对于完备格，这些规律的更一般的形式是有效的。交换律的一个特别有用的形式是

$$\bigvee_i\bigvee_j a_{ij}=\bigvee_j\bigvee_i a_{ij}。$$

Birkhoff（[3].P.53）的一个很一般的规律对所谓完备格是有效的，而它包含一般的交换律，一般的结合律，等幂律和上述交换律。对每个下标 i，设 ϕ_i 是下标的一个集，设 $\phi=\bigcup_i\phi_i$，而设 a_j 是由 $j\in\phi$ 所标定的 L 的一族元素。则 Birkhoff 规律是说

$$\bigvee_i\bigvee_{j\in\phi_i}a_j=\bigvee_{j\in\phi}a_j。$$

命题2．完备分配律等价于下述的规律这

$$\bigvee_{i\in\phi}a_i\wedge\bigvee_{j\in\psi}b_j=\bigvee_{(i,j)\in\phi\psi}a_i\wedge b_j,$$

也叫做完备分配律。

证明：这个命题中的规律蕴含前面所定义的完备分配律（令$\phi=\{1\}$），相反地

$$\bigvee_{i\in\phi}a_i\wedge\bigvee_{j\in\psi}b_j=\bigvee_i(a_i\wedge\bigvee_j b_j)=\bigvee_i(\bigvee_j(a_i\wedge b_j))=\bigvee_{(i,j)\in\phi\psi}(a_i\wedge b_j),$$

这里最后一步利用了 Birkhoff 规律。□

它们的对偶是彼此等价的，并且都等价于原始规律。

我们现在继续讨论本节一开始提出的问题，是否完备单序集的乘积满足完备分配律。通常乘积理论指出只要每个因子满足这个规律就够了，不可思议，这包含拓扑的考查。一个的单序集的区间拓扑是由半开区间这个子基产生的，或由形为$\{x|x>a\}$和$\{x|x<a\}$的子集产生的。

引理1．设 L 是具有区间拓扑的一个完备单序集，则 L 内的一个值域有界的单调增加纲收敛于它的值域的上确界。

引理2．格运算$\vee$和$\wedge$关于区间拓扑在单序集内是连续的。

定理1．完备单序集 L 服从完备分配律．

证明　只要证明这个规律的第一种形式即可。设 $a,b_i\in L$ 对 $i\in\phi$. D 是 ϕ 的所有有限子集的定向集，这里由包含关系定向，则 $b_s=\vee_{i\in S}b_i$ 和 $c_s=\vee_{i\in S}a\wedge b_i$ 对 $S\in D$ 定义了 L 内的网．引理1．蕴含 $b_s\to b=\vee_{i\in\phi}b_i$ 和 $c_s\to c=\vee_{i\in\phi}a\wedge b_i$。

由命题1，L 是分配的，而由归纳法，完备分配律对所有的有限下标集都成立。这样

$$c_s=\bigvee_{i\in S}a\wedge b_i=a\wedge\bigvee_{i\in S}b_i=a\wedge b_s.$$

$b_s\to b$ 和$\wedge$的连续性蕴含 $a\wedge b_s\to a\wedge b$。因为 c_s 有唯一的极限，我们有结论 $c=a\wedge b$。□

对完备格来说，同态这个概念比对一般格的这个概念更特殊，完备格之间的映照$e:L_1\to L_2$是一个完备格同态当且仅当它保持任意的 lub 和 glb，即当且仅当 $e\vee_i a_i=\vee_i ea_i$ 和对偶等式成立，完备格和完备格同态构成一个范畴（参看第5节）．

极大极小不等式

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n}a_{ij})\geqslant\bigvee_{j=1}^{n}(\bigwedge_{i=1}^{m}a_{i,j})$$

对任意格成立，它可推广到对完备格，而下标集是无穷的情形成立．

在许多应用中，这个单序集是实数的子区间，对大多数应用来说，应用保序变换和添加端点，事物是不改变的，所以我们可以假设我们处理的是 $J=[0,1]$。区间$[-\infty,+\infty]$，$[0,+\infty]$，$[-1,+1]$和 J 有其特别的意义，因为它们在乘法（实数的通常意义下的乘法）运算下是封闭的。这个乘法在应用上对取百分数，构成平均数等等是很重要的，格和乘法的结构以一种方法是相互有关的，这种方法也出现在其它内容里，所以我们对它作抽象的研究。

定义 一个乘法格是在运算•下封闭的一个格 M，这个运算满足“分配”律，即对所有 $a,b,c\in M$

$$a\bullet(b\vee c)=(a\bullet b)\vee(a\bullet c)$$

和 $(a\vee b)\bullet c=(a\bullet c)\vee(b\bullet c)$．

在乘法格内含有•的等式当交换$\wedge$和$\vee$，$\geqslant$和$\leqslant$时不再保持相等，这样对偶原理便失效。但是存在一个左一右对称原理，象上面两个“分配律”所表示的那样。

命题3。设 a,b,c 是一个乘法格M的元素。则

(1) $a\leqslant b\Rightarrow c\bullet a\leqslant c\bullet b$和$a\bullet c\leqslant b\bullet c$;

(2) $(a\wedge b)\bullet(a\vee b)\leqslant(b\bullet a)\wedge(a\bullet b)$.

证明:

$$a\leqslant b\Rightarrow b\bullet c=(a\vee b)\bullet c=(a\bullet c)\vee(b\bullet c)\Rightarrow a\bullet c\leqslant b\bullet c;$$

$(a\wedge b)\bullet(a\vee b)=[(a\wedge b)\bullet a]\vee[(a\wedge b)\bullet b]\leqslant(b\bullet a)\vee(a\bullet b)$. □

前述例子中的结构仍然限制过多，下面我们给出

定义、如果一个完备格是关于$\bullet$存在单位元的半群，并且满足“分配”律 $a\bullet\bigvee_i b_i=\bigvee_i(a\bullet b_i)$和$(\bigvee_i a_i)\bullet b=\bigvee_i(a_i\bullet b)$，则这个完备格是一个完备格序半群，简记为 closg. 这个半群单位元称为L的单位元，如果L存在元O使的对所有$a\in L$有

$o\wedge a=o\bullet a=a\bullet o=o$,

这个O称为L的零元，如果L存在元I使得对所有$a\in L$有

$I\vee a=I\bullet a=a\bullet I=I$,

这个I叫做L的无穷大。如果$\bullet$是交换的，我们称L为一个交换 closg，如果L作为格是分配的，我们称它为一个分配 closg，如果L作为格满足完备分配律，我们称它为一个完备分配 closg.

容易证明前面提到的所有区间是具有单位元的交换完备分配 closg. 它们都有格意义下的O和I，而J，$[-\infty,+\infty]$和$[0,+\infty]$有 closg 意义下的零如果我们给无穷大的乘法以适当定义的话。由通常乘积原理，这些区间的任一个乘积也是一个具有单位元和格O和I的交换完备分配 closg.

命题4. 一个完备格是一个 closg，这里$\wedge$作为$\bullet$，如果它是完备分配的。

这个易证的注记指出，如果我们假设L是一个具有格（不必是 closg）零和无穷大的完备分配 closg，将不失一般性，并且只需作些微的改变，而在本文其它大部分地方都作了这个假设。我们也必须假设（格）无穷大I是半群单位元。

和乘法格一样，没有对偶原理，但却有对 closg 的左—右对称原理。如果$\bullet=\wedge$，则对偶原理亦然成立，而这个$\bullet$的对偶是$\vee$.

在所有这些区间内，$\bullet$没有零除数（即$a\bullet b=0\Rightarrow a=0$或$b=0$）；但是区间的乘积将有零除数；

我们指出，因为L^X有L的代数结构，对$A,B\in L^X$的运算$\bullet$可由$A*B(x)=A(x)*B(x)$定义.

稍后我们将看到，一个集上的不分明关系（或系统）的集的代数结构是一个 closg的结构，

定义、closg 间的一个映照e: $L_1—L_2$是一个closg 同态当且仅当它保持$\vee$, $\wedge$ 和$\bullet$. 具有 closg 同态的 closg 构成一个范畴.

总之，我们将假设L是一个完备格序半群，它具有零O和半群单位元I，这个I也是一个格无穷大.

该文的大多数结果在下述更一般的假设下是有效的，这些假设是，L具有子集上定义的运算$\vee$和一个二元运算$\bullet$使得

(1) Birkhoff 的广义规律对$\vee$成立；

(2) $\bullet$是结合的，且有零O和单位元I；

(3) 这两个完备分配律与$\vee$和$\bullet$有关；

(4) $o\vee a=a$和$I\vee a=I$.

则我们用$a\leqslant b\Leftrightarrow a\vee b=b$来定义$L$上的一个传递反身序$\leqslant$，容易看到$\vee$是一个最小上界运算，$O$是零，$I$是无穷大。同时$a\leqslant b\Rightarrow a\bullet c\leqslant b\bullet c$. 为了证明这些论断，回想 Birkhoff

广义规律蕴含对$\vee$的一般交换律，结合律和等幂律。左一右对称原理成立，大概实际中出现的 L 将满足比这些要求更多的要求；例如，它们可以是 closg。

注意，作为抽象逻辑，我们的 L 一般地为非否定，而序关系能够用包含表示。但是，如果 L 是一个完备分配格（具有 O 和 I），它是互为余的（参看[3],P.147）。如果它是有余的，当然它是一个波雷尔代数。cohen 的独立结果，我认为能够由对集论赋以模型的波雷尔代数得到。

我们用一些附带的例子结束本节，一个具单位元的（结合）环的所有左理想作成的集是一个适当的完备格序半群。在一个自由半群内正则事件（词）的集是一个（不完备）格序半群。一个拓扑空间开集作成的集是一个（上半完备）半一格序半群，它具有零和适当单位元。如果企图用定义$\wedge_i U_i = \mathrm{Interior}(\cap_i U_i)$把它看作一个完备格，分配律不必成立。

4. 不分明化（Fuzzefication）

不分明化是把不分明结构加到一个定义（概念），定理，甚或整个理论上的过程。这个过程不必是唯一的，正如将要看到的。在一定意义上，该文的大部分就是致力于不分明化集论。一个基本的方法是由不分明化原理给出的：一个不分明事物（或 L—不分明或 L—）是一些事物的一个 L—集。（即一些事物集上的一个 L—不分明集）。

这不是数学的结果，不过帮助人们系统地阐明和解释定义。只要有可能，我们将利用专门术语，但须注意它并不适于所有的情形，即使适用，它不一定给出最合适的不分明化。

作为例子，我们阐明对不分明集和子集的专门术语。回忆一下，L^X 的元素是X上的 L—不分明集，或更简单地说是 X 上的 L—集，但不是 X 上的集。由这个原理，X 的一个 L—不分明子集是 X 的子集的一个 L—集，即 L^{2^X}的一个元素。X 上的一个 L—不分明的 L—集（或一个不分明的 L—集，或 X 上的一个不分明的不分明集）是L^{2^X} 的一个元素。

对关系可得到稍微类似情况，集 X 和 Y 间的一个 L—关系是 L^{XY} 的一个元素。X 和 Y 间的一个不分明 L—关系是$L^{2^{XY}}$ 的一个元素。“关系”不带词头意即“Z—关系”，所以一个 L—不分明关系意味着 $L^{2^{XY}}$的一个元素，这个术语易混淆，幸好本文后面并不用它；但要注意，不分明化原理提出 L—不分明的 Z—关系，虽然它对许多目的不是最自然的不分明化。因为 $Z\subseteq L$，所以 L—不分明的 Z—关系是特殊的 L—不分明的 L—关系。这个 L—关系首先由 Zadeh〔3〕对 $L=J$ 和 $X=Y$ 提出。

[1]由 X 到 Y 的一个 L—不分明映照是由 X 到 Y 的映照的一个 L—集，即 Y^X 到 L的一个映照，或 L^{Y^X}的一个元素。如果 X 和 Y 有比集更多的结构，对应地限制这个映照是适当的。例如，如果 X 和 Y 是向量空间，那么 X 到 Y 的一个 L—不分明线性映照是 X 到 Y 线性映照的一个不分明集，即 $L^{\mathrm{Lin}(X,Y)}$的一个元素。

非常重要的是，所有不分明事物是特殊的不分明集，即某集到 L 的函数；不分明集对所有不分明对象是基本建筑外，由此推出，所有不分明事物享有大多数 L 享有的同样代数性质。

例如，设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是 X上的 L—不分明 L—集。则$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$由$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})(A)=\mathscr{A}(A)\vee\mathscr{B}(A)$,

这里A是X上的一个L—集，$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$可对偶地定义，而$X$上所有$L$—不分明的$L$—集的集合是一个格；它有$O, I$，并是完备分配的，因为$L$具有这些性质，对偶原理成立，等等。

非不分明的事物或仅是平凡的不分明事物是 crisp；crisp 性质与不分明性相对立，虽然从技术角度看它是一个特殊情形。

定义 设L有O, I。X上的一个L—不分明集是 crisp，如果它在X上仅取值O, I。

只要设$L=2$，总能够特殊化某不分明对象或结构使之回到（crisp）集论的对象或结构，有时，为了得到原始集论模型，限制单子（singl etons)是必要的；例如，一个不分明L—子集可以等价于一个通常子集，只要要求它是crisp，并且只在单子子集上不为O，

定义 X上的一个L—不分明集是一个单子，如果除过一个点之外对所有的$x\in X$，它取值都是O。设$x\in X$；则x^+是X上的crisp单子，如果$x\neq y$，则$x^+(y)=o$且当$x=y$时$x^+(y)=I$。

例如，设$A\subseteq X$。则A^+是X的crisp L—不分明子集，它仅在A上是非－O。x^+相似于通常集论的$\{x\}$。

我们不是总能弄清楚上面所说的特殊化，也不是总能弄清楚下述与通常集类似的地方。

$\vee$和$\wedge$是X上不分明的不分明集；因为$\vee: A\to\vee A$，这里$A\in L^X$，而$\vee A\in L$。

没有理由说，没有不分明的不分明的不分明集，L_1—不分明的L_2—不分明集，等等。事实上不分明化的水平无止境。

5、范畴和不分明映照的合成

一个范畴$\mathscr{C}$是一族事物，例如群，连同对每对事物X, Y，适当类型的从X到Y的映照或态射的一个集Mor（X, Y），象群同态映射。如果X是$\mathscr{C}$的一个事物，写$X\in\mathscr{C}$。对$\mathscr{C}$的适当映射叫做$\mathscr{C}$—态射。Mor(X,Y)和Mor(X',Y')不相交，如果$(X,y)\neq(X',y')$。假设从X到Y的一个映照能够与从Y到Z的另一个映照合成产生一个从X到Z的新映照，如果$f\in$ Mor(X,Y)和$g\in$ Mor(Y,Z)，则它们的合成记为$gof\in$ Mor(X,Z)，合成被看作满足结合律，并且最后假设对每个$X\in\mathscr{C}$，有恒等映照$1_X\in$ Mor(X,X)，使得对每个$f\in$ Mor(X,Y)，每个$g\in$ Mor(Y,X)和每个$Y\in\mathscr{C}$，成立着$foL_X=f$和$1_Xog=g$、如果$f\in$ Mor(X,Y)，写$f: X\to Y$或$X\xrightarrow{f}Y$。为了强调$\mathscr{C}$，写为Mor $\mathscr{C}$（X,Y）。

这个概念虽然很抽象和一般，但不是很深的。它将使我们用统一的方法描述全部理论的不分明化，并推动我们的某些结果。

范畴在数学中是很普通的。例如，具有群同态的群，具有映照的集，具有格同态映照的格，具有完备格同态映照的完备格，具有Closg同态映照的Closg，具有连续映照的拓扑空间和具有可测变换的可测空间都是范畴。Lang[4]进一步讨论了具有类似于我们概念的范畴。

定义、设$\mathscr{C}$是一个范畴，并设$X, Y\in\mathscr{C}$，则X到Y的L—不分明的$\mathscr{C}$—态射是X到Y的$\mathscr{C}$—态射的一个L—不分明集，即$L^{\mathrm{Mor}(X,Y)}$的一个元素。如果$F\in L^{\mathrm{Mor}(X,Y)}$，写$F$：$X\to Y$或$X\xrightarrow{F}Y$。我们也可以称$F$是一个不分明$\mathscr{C}$—映照。

上面的定义是与不分明化一致的，如果$\mathscr{C}$是某个特殊的范畴，譬如说线性空间和线性

映射，我们采用一个更特殊的名字，L—不分明线性映照。

定义、如果 F：$Y\to Z$和G：$X\to Y$是L—不分明$\mathscr{C}$—态射，则它们的合成 FoG：x—z 如下定义。对 $h\in \mathrm{Mor}(X,Z)$

$$F\circ G(h)=\bigvee_{f,g}\{F(f)\bullet G(g)\mid g:X\to Y,\ f:Y\to Z,\ 和\ fog=h\}.$$

如果 $L=2$，而 F 和 G 是（crisp）单子，$\vee$成为存在限制，$\bullet$成为和，上述的便是通常的合成。特别注意，对 $L=J$，我们允许的两个主要的$\bullet$，$\wedge$和乘法在 z—Closg2 上一致，并且具有的逻辑和也一致；这样在不管那种情形下，$\bullet$都推广了"和"。

命题1．不分明$\mathscr{C}$—映照的合成是满足结合律。

证明、设 $X\xrightarrow{H}Y\xrightarrow{G}Z\xrightarrow{F}W$ 是不分明$\mathscr{C}$—态射，并设 $i\in \mathrm{Mor}(X,W)$，则

$$((FoG)oH)(i)=\vee\{\vee F(f)\bullet G(g)\mid fog=j\}\bullet H(h)\mid joh=i\}$$

$$=\vee\{\vee\{F(f)\bullet G(g)\bullet H(h)\mid fog=j\}\mid joh=i\}$$

$$=\vee\{F(f)\bullet G(g)\bullet H(h)\mid fogoh=i\}.$$

类似地能证明，$(Fo(GoH))(i)$等于[3]样的式z。□

定义 $X\in\mathscr{C}$上的恒等 L—不分明映照是 $L^{\mathrm{Mor}(X,Y)}$内的 crisp 单子 $(1_N)^+$。我们也将把它记为 1_N，如果不会混淆的话。

命题2．1_X对不分明$\mathscr{C}$—态射是一个单位元；即对每个$F\in \mathrm{Mor}(X,Y)$，$1_Y oF=Fol=F$.

证明：$(1_Y oF)(h)=\vee\{1_Y(f)\bullet F(g)\mid fog=h\}=\vee\{F(g)\mid 1_Y og=h\}=F(h)$.

而另一个等式可类似证明。□

合成的这两个基本性质被下述定理所总结，它们组成了这个定理的一个证明。

定理1 设$\mathscr{C}$是一个范畴，则具有 L—不分明$\mathscr{C}$—态射的$\mathscr{C}$的事物和上面定义的合成构成一个范畴，记为 $L^{\mathscr{C}}$.

这个构造不分明化了集论，但是这个不分明化包含不分明映照和 Crisp 集。结合不分明集和映照的方法下一节将讨论，并且集论被更满意地不分明化了。其它范畴的完备不分明化是一个困难而又重要的问题，我们将在别处讨论。

一个不分明$\mathscr{C}$—映照被看作$\mathscr{C}$的事物的一个不分明处理过程；两个不分明映照的结合则是首先用一个处理，然后用另一个处理。

在$\bullet$是$\wedge$的情形，通常有一个对偶合成，由上述表达式的对偶所定义，我们用$\hat{\circ}$记之，它满足上述命题的对偶；因为它们是自对偶的，它满足定理1的结论。因为一般地$\bullet$关于$\wedge$不满足分配律，这些考查不适合于任意的 Closg。

用一些纯范畴理论的结果和概念来结束这一节，它们将是有用的，至少后来有意义。设$\mathscr{C}$是一个固定的范畴。

譬如说对集合，能够用一种方法——这种采用在任一范畴内有意义——表微1—1和满映照。但是在其它范畴内，满足这些条件的映照不必是在集论意义下的1—1和满足映照。这样一个有意义的问题是：在每个给定范畴内，决定它们到底是什么。这些映照被给定新的名称，如这样：$f\in \mathrm{Mor}(X,Y)$是$\mathscr{C}$内的一个相互保核收缩，当且仅且$\exists g\in \mathrm{Mor}(Y,X)$使得$gof=1_X$. $f\in \mathrm{Mor}(X,Y)$是$\mathscr{C}$内的一个保核收缩，当且仅当$\exists g\in \mathrm{Mor}(Y,X)$使得$fog=1_Y$. $f\in \mathrm{Mor}(Y,X)$是$\mathscr{C}$内的一个同构，当且仅当$\exists g\in \mathrm{Mor}(Y,X)$使得$gof=1_X$和$fog=1_Y$.

f 是一个同构当且仅当它是一个相互保核收缩和一个保核收缩，这个断言的一半是明显的，而另一半能如下看出：假设 $\exists g, \overline{g}$ 使得 $g \circ f = 1_X$ 和 $f \circ \overline{g} = 1_Y$。则

$$g = g \circ 1_Y = g \circ (f \circ \overline{g}) = (g \circ f) \circ \overline{g} = 1_X \circ \overline{g} = \overline{g}.$$

$Mor(X,X)$ 的元素叫做 X 的自同态。同构的自同态叫做自同构。X 的自同态的集记为 $End(x)$，自同构的集记为 $Aut(x)$。

命题 3、$End(x)$ 是具单位元的半群，而 $Aut(x)$ 是一个群。

证明、任意两个自同态的合成有定义，且是另一个自同态。由范畴的定义，合成满足结合律，并且在 $Mor(X, Y)$ 内有一个单位元。这样 $End(x)$ 是一个具单位元的半群。为了检验 $Aut(x) \sqsubseteq End(x)$ 是一个群，只要注意 X 的每个自同构有一个逆，由同构的定义，所说的逆也是一个自同构。□

如果对 $f \in Mor(X,Y)$，存在某 $g \in Mor(X,Y)$ 使得 $g \circ f = 1_X$ 和 $f \circ g = 1_Y$，则 f 是可逆的，且 g 是 f 的一个逆，我们可以写 $g = f^{-1}$。那么我们有下述

命证 4 f 是可逆的当且仅当 f 是一个同构。它的逆是唯一的，如果存在 f 可逆 $\Rightarrow f^{-1}$ 可逆，且 $(f^{-1})^{-1} = f$。进一步，如果 f 和 g 是可逆的，$f \circ g$ 有定义，则 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。

证明：第一个论断是定义的另一说法，第二个论断可由证明"f 是一个同构当且仅当 f 是一个相互保核收缩和保核收缩"时所使用的方法推出，因为 f 的两个逆 g，$\overline{g}$ 的每个既是左逆也是右逆。第三个论断可立即由定义推出。最后一个论断的证明，只须注意 $(f \circ g)(g^{-1} \circ f^{-1}) = 1$ 和 $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = 1$，利用结合律。□

范畴 $\mathscr{C}$ 的一个子范畴是一个范畴，它的事物和态射是 $\mathscr{C}$ 的事物和态射的子族。注意所有的范畴有直接和与乘积。

因为我们既要处理序又要处理范畴概念，就应注意，一个 Poset L 能以下法看作一个范畴：它的事物是 L 的元素；对 $a,b \in L$，$Mor(a,b)$ 是某一个点集，譬如说当 $a = b$ 时，它是 $\{\phi\}$，否则 $Mor(a,b) = \phi$。结合律对应传递性，单位元的存在性对应反身性。作为一个范畴，L 有直接和与乘积，当且仅当它作为一个 Poset 是一个完备格。

6. 关　系

关系的重要性几乎是不言自明的。在一定意义上，科学就是揭露所关心的事物之间的关系，Zadeh [5] 已经指出关系的研究等价于系统的一般研究（系统是"输入"空间和"输出"空间之间的关系）。另外，在我们的理论的纯粹数学的发展中，关系起着一个中心作用。

在所谓"软"科学中出现困难，因为它所包含的关系不以"硬"的形式出现，譬如说，它们在古典物理学中。概率论的彻底应用摆脱了许多困难，但是显然留下其它困难。我们提出，更进一步的困难可以通过不分明性的系统开发而解决。

反省将指出，对于 x 和 y 是小汽车，小说，政治家等，关系"x 较 y 好"这个概念在某种意义下是不分明的。我们提出，这里所说的意义可以适用于生物学，心理学，工程设计和经济学等问题。

我们知道，L—关系 R 是 $L^{X \times Y}$ 的元素，而 L—不分明的 L—关系是函数 $\mathscr{R}: L^{X \times Y} \to L$。设 $R(X,Y;L)$ 表示 X 到 Y 的 L—关系的集合，而 $\mathscr{R}(X,Y;L)$ 表示 X 到 Y 的不分明 L—

关系的集合。

在系统理论中，一个不分明 L—关系对应不分明系统的一个不分明类（参看 Zadeh[2]）。这一节我们讨论不分明关系的代数理论和计算，它也是不分明统的代数理论和计算。

如果 R 是 Y 到 Z 的一个 L—关系，S 是 X 到 Y 的一个 L—关系，R 和 S 的合成 $R \circ S$ 可由下式定义

$$(R \circ S)(X,Z)=\bigvee_{y}\{S(x,y)\bullet R(y,z)\}.$$

命题 1、L—关系的合成满足结合律。

证明：

$$
\begin{aligned}
[(R\circ S)\circ T](x,w) &= \bigvee_{z}\{\bigvee_{y}\{R(x,y)\bullet S(y,z)\}\bullet T(z,w)\} \\
&= \bigvee_{y,z}\{R(x,y\bullet S(y,z)\bullet T(z,w)\} \\
&= \bigvee_{y}\{R(x,y)\bullet \bigvee_{z}\{S(y,z)\bullet T(z,w)\}\} \\
&= [R\circ(S\circ T)](x,w). \square
\end{aligned}
$$

设 X 是一个集，则 E_X 表示 X 的（Crisp）恒等关系，它的定义是 $E_X(x,x')=0$ 如果 $x\neq x'$，而 $E_X(x,x)=I$。我们可以把 E_X 写为 E。

命题 2 E 是单位元；即，如果 R 是 X 到 Y 的一个 L—关系，$E_Y \circ R=R\circ E_X=R$。

证明： $E_X \circ R(x,y)=\bigvee_{Y}\{R(x,y)'\bullet E_Y(y',y)\}=R(x,y)$，另一个可以类似证明。□

这两个命题指出，有一个范畴 $R(L)$，它的事物是集，而它的态射是 L—关系；即对集 X,Y $\mathrm{Mor}(X,Y)=R(X,Y;L)$。

X 到 Y 的一个 L—关系 R 是函数，当且仅当对每个 $x\in X$，存在唯一的 $y\in Y$ 使得 $R(x,y)>0$。则一个 Crisp 函数关系是一个通常函数。上述结构能够重复利用函数关系作为态射，得到一个范畴，它是集和对 $L=2$ 的映照的范畴。

如果 $\bullet$ 是 $\wedge$，这个结构能适于关系的对偶合成 ó。

根据前一节的一般不分明化过程，$L^{R(L)}$ 也是一个范畴，它的事物是集，而它的态射是不分明 L—关系，即对 X,Y，集

$$\mathrm{Mor}(X,Y)=L^{R(X,Y;L)}=\mathscr{R}(X,Y;L)。$$

$L^{R(L)}$ 内的单位元是 $(E_X)^+$，我们记为 ε_X。显然，对 $\mathscr{R}\in(Y,Z;L)$，$\mathscr{S}\in\mathscr{R}(X,Y;L)$ 和 $T\in R(X,Z;L)$ 可如下给出合成的第二个定义

$(\mathscr{R}\circ\mathscr{S})(T)=\bigvee_{R,S}\{\mathscr{R}(R)\bullet|R\circ S\leqslant T\}\varphi(s)$ 它满足结合律。我们将写 $L^{R(L)}$ 为 $\mathscr{R}(L)$。

实际上，这些关系族的代数结构仍是较丰富。$R(X,Y;L)$ 和 $\mathscr{R}(X,Y;L)$ 都是形为 L^S 的，对某个集（S 分别是 XY 和 $R(X,Y;L)$），所以特别是 L—集。这样它们采取 L 的代数结构，如通常那样。

特别地，它们是偏序集，因此对不分明 L—关系，合成的下述定义是有意义的

$$(\mathscr{R}\circ\mathscr{S})(T)=\bigvee\{\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)|R\circ S\leqslant T\}.$$

易证存在一个范畴，它的事物是集，它的态射是不分明 L—关系，而它的合成以这种方式定义。

一个 X 到 Y 的 L—不分明的 L—关系是函数，如果它仅在函数 L—关系上为非一 0。它存在 $\mathscr{R}(L)$ 的一个子范畴，它的态射是函数不分明 L—关系。

合成和 $R(X,Y;L)$ 内的格运算和 $\mathscr{R}(X,Y;L)$ 有下述关系：

命题3A． 设 $R, R_i, T \in R(X,Y;L)$，$S, S_i, U \in R(X,Y;L)$．则

(1) 如果 O 是关系 O，$O \circ R = R \circ O = O$；

(2) $R \leqslant T \Rightarrow R \circ S \leqslant T \circ S \leqslant T \circ S$，并且 $S \leqslant U \Rightarrow R \circ S \leqslant R \circ U$；

(3) $R \circ \bigvee_i S_i = \bigvee_i (R \circ S_i)$，并且 $(\bigvee_i R_i) \circ S = \bigvee_i (R_i \circ S)$；

(4) 对 $\bullet = \wedge$，$R \circ \bigwedge_i S_i \leqslant \bigwedge_i (R \circ S_i)$，$(\bigwedge_i R_i) \circ S \leqslant \bigwedge_i (R_i \circ S)$．

证明： 第一和第二个断言实际上是明显的。在 (3) 和 (4) 中的两个断言是对称的，所以只要证明其中一个即可，作于下：

$$(R \circ \bigvee_i S_i)(x,z) = \bigvee_y \{[\bigvee_i S_i(x,y)] \bullet R(y,z)\} = \bigvee_i \bigvee_y \{S_i(x,y) \bullet R(y,z)\}$$

$$= \bigvee_i (R \circ S_i)(x,z);$$

$$(R \circ \bigwedge_i S_i)(x,z) = \bigvee_y \{[\bigwedge_i S_i(x,y)] \bullet R(y,z)\} = \bigvee_y \bigwedge_i \{S_i(x,y) \bullet R(y,z)\}$$

$$\leqslant \bigwedge_i \bigvee_y \{S_i(x,y) \bullet R(y,z)\} = \bigwedge_i (R \circ S_i)(y,z). \square$$

命题3B 在命题 3A中的同样结果对 $\mathscr{R}, \mathscr{R}_i, \mathscr{R}\mathscr{T}, \in (Y,Z;L)$ 和 $\varphi, \varphi_i, \mathscr{U} \in \mathscr{S}(X,Y;L)$ 都成立，在合成的两类定义下。

$R \in R(X,Y;L)$ 的逆是 L—关系 $\check{R} \in R(Y,X;L)$，这里 $\check{R}(y,x) = R(x,y)$．而 $\mathscr{R} \in \mathscr{R}(X,Y;L)$ 的逆是不分明 L—关系 $\check{R} \in \mathscr{R}(Y,X;L)$，这里 $\check{\mathscr{R}}(R) = \mathscr{R}(\check{R})$．

命题 4．设 $R, R_i \in R(X,Y;L)$ 和 $S \in R(Y,Z;L)$．则

(1) $(S \circ R)^{\vee} = \check{R} \circ \check{S}$；

(2) $(\bigvee_i R_i)^{\vee} = \bigvee_i \check{R}_i$，及它的对偶也成立；

(3) $(\check{R})^{\vee} = R$．

进一步同样结果对 $\mathscr{R}$，$\mathscr{R}_i$，$\mathscr{S}$ 成立（关于两种合成定义）．

证明：

$$(\bigvee_i R_i)^{\vee}(y,x) = (\bigvee_i R_i)(x,y) = \bigvee_i (R_i(x,y)) = \bigvee_i (\check{R}_i(y,x)) = \bigvee_i (\check{R}_i)(y,x).$$

$$(\mathscr{R} \circ \mathscr{S})^{\vee}(T) = \bigvee \{\mathscr{R}(R) \bullet \mathscr{S}(S) \mid R \circ S \leqslant \check{T}\} = \bigvee \{\mathscr{R}(R) \bullet \mathscr{S}(S) \mid \check{S} \circ \check{R} \leqslant T\}$$

$$= (\check{\mathscr{S}} \circ \check{\mathscr{R}})(T).$$

其它的断言或是很容易的或是类似于上述。$\square$

因为 $R(L)$ 和 $\mathscr{R}(L)$ 是范畴，前节定义的逆的抽象概念作为关系之逆的概念是有用的。为了更具体，一个 L—关系 R 是可逆的，当且仅当存在一个 L—关系 S 使得 $R \circ S = E$ 和 $S \circ R = E$；则 S 是 R 的逆，记为 $R^{-1} = S$。对 L—不分明的 L—关系 $\mathscr{R}$ 有类似结果，关于逆的一般范畴结果给出下述

命题 5 逆 L—关系若存在必唯一。如果 R 是可逆的，其逆记为 R^{-1}，则 $(R^{-1})^{-1} = R$。如果 R 和 S 是可逆的，$R \circ S$ 被定义，则 $R \circ S$ 也是可逆的，并且 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$．对不分明 L—关系有类似结果。

似乎可逆 L—关系和不分明 L—关系必须是很特殊的，并且不是很不分明的。相反(conuerse) 和逆 (iwvesse) 的性质形式上的类似性和对$L=2$ 的事实提示相反和逆之间应当有一个强的关系。这些猜测在假定 • 在 L 内没有零因子下被证明了。定理 1A 失效，如果有：若 $L=J^2$，$\bullet=\wedge$，$(1,0)=u$，$(0,1)=v$，$X=Y=\{1,2\}$，而 R 这样定义，对 $i,j\in\{1,2\}$，当 $i\neq j$时，$R(i,j)=u$，但 $R(i,i)=v$，则 $R^{-1}=R$，但是 R 不是 crisp。

定理1A、如果 • 没有零因子，可逆 L—关系是集同构（即 crisp 1—1 到集映照上）

证明：假设 $R\in R(X,Y;L)$，$S\in R(Y,X;L)$ 使得 $SoR=E_X$ 和 $RoS=E_Y$，即使得 $\vee_y\{R(x',y)\bullet S(y,x)\}=E_X(x',x)$和 $\vee_z\{S(y,x)\bullet R(x,y')\}=E_Y(y,y')$。这些蕴含着：

(1) $\forall x'\neq x\forall y R(x',y)\bullet S(y,x)=0$

(2) $\forall x\vee_y\{R(x,y\{\bullet S(y,x)\}=I$；

(3) $\forall y\neq y A' x R(x,y')\bullet S(y,x)=O$；

(4) $\forall y\vee_x\{S(y,x)\bullet R(x,y)\}=I$。

现在设 R 不 Cnisp，即设 $\exists x_0$，y_0 使得

$$R(x_0,y_0)=a\neq O,I.$$

由 (1)

$$\forall x\neq x_0 R(x_0,y_0)\bullet S(y_0,x)=O,$$

即 $a\bullet S(y_0)x)=O$。因为 $a<I$，由 (4) 知必 $\exists$一个 $\overline{x}\neq x_0$ 使得 $S(y_0,\overline{x})\bullet R(\overline{x},y_0)\neq o$。则 $a\bullet[S(y_0,\overline{x})\bullet R(\overline{x},y_0)]\neq O$，因为没有零因子，但是$[a\bullet S(y_0,\overline{x})]\bullet R(\overline{x},y_0)=O$，这与结合律矛盾。所以 R 是 Crisp，根据对称性，S 也是 Crisp。

则(2)变为

$$\forall x\exists y: R(x,y)=S(y,x)=I,$$

(4)变为

$$\forall y\exists x: R(x,y)=S(y,x)=I.$$

现在假设 $R(x,y)=R(y,x)=I$，并且对某个 $y\neq y'$ 有 $R(x,y')=I$。则 (3)$\Rightarrow R(x,y')\bullet S(y,x)=0$，那么$R(x,y')$和$R(y,x)$之一为0，又发生矛盾。这样一来（$\exists 1$表示$\exists$唯一的）

$$\forall x\exists 1y: R(x,y)=S(y,x)=I,$$

由对称性得

$$\forall y\exists 1x: R(x,y)=S(y,x)=I,$$

当然 $R(x,y)=S(y,x)=0$ 否则 R 和 S 都是函数并且同构，像 crisp 一样，有 $R^{-1}=S$。□

定理1B、$\mathscr{R}(L)$内的可逆不分明 L—关系是 R^{-1}形的，这里 R 是一个可逆 L—关系；当相反(conieise)存在时，逆(iwveiss)与它一致。

证明：假设$\mathscr{R}\in\mathscr{R}(X,Y;L)$，$\mathscr{S}\in\mathscr{R}(Y,X;L)$使得$\mathscr{R}o\mathscr{S}=\mathscr{E}_Y$和$\mathscr{S}o\mathscr{R}=\mathscr{E}_X$，则 (1) 若 $RoS\neq E_X$，则$\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)=0$；(2) $\exists R,S$ 使得 $RoS=E_X$ 且 $\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)>0$；(3)若 $SoR\neq E_Y$，则$\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)=0$；(4) $\exists R,S$ 使得 $SoR=E_Y$ 且$\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)>0$.

设 R,S 满足(2)。则$\mathscr{R}(R)\bullet\mathscr{S}(S)>0$，由(3)知使得 $SoR=E_Y$。这样 R 和 S 是互逆的，所以 R 可逆。

设 S 和前面一样，假设 $\exists R'$ 使得$\mathscr{R}(R')>0$，

则$\mathscr{R}\circ\mathscr{S}(R'oS)>O$，这样$R'oS=E_X$。同样$\mathscr{S}\circ\mathscr{R}(SoR')>O$，所以$SoR'=E_Y$。由$S$逆的唯一性，$R=R'$。

所以$\mathscr{R}$在R上是I，在其它地方是O，即$\mathscr{R}=R^+$。对称地，$\mathscr{S}$，S也有相应结果。□

如果我们利用合成的第二个定义（用$RoS\leqslant T$替代$RoS=T$），便没有可逆不分明L—关系，因为不能有$\mathscr{R}\circ\mathscr{S}=\mathscr{E}$，事实上$F\geqslant E\Rightarrow\mathscr{R}\circ\mathscr{S}(E)\geqslant\mathscr{E}(E)=I$，但我们假设有$E\neq F\Rightarrow\mathscr{R}\circ\mathscr{S}(F)=0$。

特别地，如果L没有零因子，我们已经决定第$Aut(X)$，它本质与集范畴内情形相同。即使L没有零因子，相互保核收缩和保核收缩不必是crisp。

逆（inwense）和相反（conuense）一致这个猜测一般来说是对的。

定理2. 一个L—关系的逆（当存在时）等于其相反。

证明： 若$\mathscr{R}$是可逆的，$\mathscr{R}^{-1}=\mathscr{S}$。则

$$SoR(x,\overline{x})=\bigvee_y R(x,y)\bullet S(y,\overline{x})=O,\text{ 当 }x\neq\overline{x};$$

$$RoS(y,\overline{y})=\bigvee_x S(y,x)\bullet R(x,\overline{y})=O,\text{ 当 }y\neq\overline{y}.$$

现在$R=RoSoR$，所以我们得到

$$R(\overline{x},\overline{y})=\bigvee_{x,y}R(\overline{x},y)\bullet S(y,x)\bullet R(x,\overline{y})=R(\overline{x},\overline{y})\bullet S(\overline{y},\overline{x})\bullet R(\overline{x},\overline{y}),$$

最后一步是由前面的结果，除过$y=\overline{y}$和$x=\overline{x}$，有$R(\overline{x},y)\bullet S(y,x)\bullet R(x,\overline{y})=O$。所以由第3节命题8的(1)有

$$R(\overline{x},\overline{y})\leqslant S(\overline{y},\overline{x}),$$

由对称性$S(\overline{y},\overline{x})\leqslant R(\overline{x},\overline{y})$。所以对所有$\overline{x}$，$\overline{y}$有$R(\overline{x},\overline{y})=S(\overline{y},\overline{x})$，即$S=\check{R}$。□

前一节我们证明了一个范畴内的事物的自同态集是具单位元的半群（命题3）。这样一来$R(X,X;L)$和$\mathscr{R}(X,X;L)$是具单位元的半群，它们此后分别记为$R(X;L)$和$\mathscr{R}(X;L)$。结合这一结果和本节较早的结果（命题3），我们看到已经证明了

定理3、$R(X;L)$和$\mathscr{R}(X;L)$是完备分配closg，它具有单位元，零和格论无穷大，当我们利用合成时。

这当然是closg的附带结构，它们已继承了L，这里•作为乘法。现在推出（[3].P.202）它们是剩余格（关于合成）。

X上的L—关系R是对称的，当且仅当$R=\check{R}$，是传递的，当且仅当$RoR\leqslant R$。对于不分明L—关系类似。

命题6 对称L—关系的交（即下确界）是对称的，传递L—关系的交是传递的；对称L—关系的并（即上确界）是对称的。对不分明L—关系有类似结果。

关于传递性的结果要求$\bullet=\wedge$。

证明： 设$R_i\in R(,XL)$使得$R_i=\check{R}_i$。则

$$(\bigvee_i R_i)^{\vee}=\bigvee_i\check{R}_i=\bigvee_i R_i,$$

对偶关系也成立。现在设$R_i\in R(X;L)$使得$R_ioR_i\leqslant R_i$。则

$\bigwedge_i R_i o \bigwedge_i R_i \leqslant \bigwedge_i (R_i o \bigwedge_i R_i) \leqslant \bigwedge_i (R_i o R_i) \leqslant \bigwedge_i R_i$. 对$\mathscr{R}(X;L)$类似. □

推论，每个 $R\in R(X;L)$有一个最小对称 L—关系包含它，也有一个最小传递 L—关系包含它，有一个最大 L—关系含于它。对 $R(X;L)$类似。

证明：所有断言的证明类似于第一个，而它的证明如下：设 Q 是所有对称 L—关系 S 的集使得 $R\leqslant S$。$Q\neq\phi$ 因为 $I\in Q$，则 $S_0=\bigwedge\{S|S\in Q\}$ 是所需的最小对称关系$\geqslant R$。□

同样可建立：每个关系含于唯一的最小关系内，这个最小关系既是传递的也是对称的。

7. 像

本节我们定义和讨论各种像的性质。直接像是 Zadeh[1] 影子（Shadow）概念的一种推广；利用它，我们以一种方法不分明化集论，这包含不分明的映照和不分明集。各种像有重要的现象解释。

设 p 表示一个固定简单集，或包含 p 的单子 {p}（上下文将指出它到底是什么）。

如果 A 是 P 到 X 的一个 L—关系，我们也将令 A 表示 X 上的 L—集，它分配$A(p,x)$到 $x\in X$；相反地，如果 A 是 X 上的一个 L—集，我们令 A 也表示 p 到 X 的 L—关系，它由 $A(p,x)=A(x)$定义。这个对应等价于同构 $L^{P\times X}\cong L^X$。它也等价于不分明集和那些不分明系统之间的一种对应关系，这些不分明系统一旦它们的一个输入被“推进”（pushed）就会产生一个不分明输出。

类似地，Y 到 p 的 L—关系是 Y 上 L—集的 1—1 对应关系。则合成 RoA 是 p 到 Y 的一个 L—关系，它可以看作 Y 上的一个 L—集。我们称这个集为 A 的直接 R—像或 A 的 R—像，或在 R 下 A 的像，我们以 $R(A)$或 RoA 记它。

如果我们把 R 看作一个系统，而把 A 看作一个输入，则像 $R(A)$是一个不分明输出，它分配元素的赋值或隶属度等等到点输出 $y\in Y$。前节关系的研究使我们能够立即推出这个直接像的一系列性质。

命题1．设 A,B 和 A_i 是 X 上的 L—集，而 R,S 和 R_i 是 X 到 Y 的 L—关系．则

(1) $A\leqslant B\Rightarrow R(A)\leqslant R(B)$；

(2) $R(\bigvee_i A_i)=\bigvee_i R(A_i)$；

(3) $R(\bigvee_i A_i)\leqslant\bigvee_i R(A_i)$；

(4) $R(0)=0$；

(5) $R\leqslant S\Rightarrow R(A)\leqslant S(A)$；

(6) $[\bigvee_i R_i](A)=\bigvee_i[R_i(A)]$；

(7) $[\bigwedge_i R_i](A)\leqslant\bigwedge_i[R_i(A)]$，对$\bullet_L=\wedge$；

(8) $0(A)=0$.

也有关系合成的结合律的下述有用结果：

命题2 设 R 是一个 Y 到 Z 的 L—关系，S 是 X 到 Y 的一个 L—关系，A 是 X 的 L—集。则

$(RoS)(A)=R(S(A))$.

如果 R 是 X 到 Y 的一个 L—关系，B 是 Y 上的一个 L—集，合成 BoR 定义 X 上的

一个 L—集，我们称它为 B 的原 R—像或在 R 下 B 的原像，并记以 $\check{R}(B)$。这个述语是恰当的，只需注意原像事实上是$(\check{R}\circ\check{B})^{\vee}$，这里当一个集是 P 时，$^{\vee}$没有多少差别，前一节关于相反（converse）的结果允许这节命题 1 和 2 的性质对原像成立。

如果 $L=2$,这些结果就成为集论映照的通常的类似论断。(原像通常叫做逆像(invenre jmage))

假设 R 是 X 到 Y 的一个关系，A 是 X 上的一个 L—集，B 是 Y 上的一个 L—集。则 A 和 B 的 R—像是 L 的元素，由合成 BoRoA 给出（如果你愿意把它写为 BoRoA(P,P) 也可）。它测量在 R 下 A 和 B 相关的程度。与上述平行的命题对这个二重像也成立。

事实上，直接像和原像是下述二重像的特殊情形：$R(A)(y)=y^{+}\circ R\circ A$；和 $R(B)(x)=B\circ R\circ x^{+}$.

我们现在给出允许的集论不分明化。设范畴$S(L)$的事物是L—集 $A:X\to L$,而从$A:X\to L$ 到 $B:Y\to L$ 的态射是有序三元（A,B,R），这里是 X 到 Y 的一个 L—关系使得 $R(A)\leqslant B$，即

$$\mathrm{Mor}(A,B)=\{(A,B,R)\mid R(A)\leqslant B\}.$$

设$(A,B,R)\in\mathrm{Mor}(A,B)$和$(B,C,S)\in\mathrm{Mor}(B,C)$。则$(B,C,S)\cdot(A,B,R)$定义为$(A,C,S\circ R)$，由命题 2 的结合律性质看到它是 $\mathrm{Mor}(A,C)$的一个元素。所需的范畴结合律可由合成关系的结合律证明，显然$(A,A,1_X)\in\mathrm{Mor}(A,A)$是 $A:X\to L$ 的一个单位元。我们称$S(L)$为 L—集和 L—关系的范畴。其态射仅含函数关系的子范畴 $F(L)$是不分明集和不分明函数的范畴。

这些考察推广到不分明 L—关系和不分明 L—集。

设$\mathscr{R}$是 X 到 Y 的一个不分明 L—关系，而$\mathscr{A}$是 X 上的一个不分明 L—集，可看作 P 到 X 的一个不分明 L—关系。则合成$\mathscr{R}\circ\mathscr{A}$是 P 到 Y 的一个不分明 L—关系，它可看作 Y 上的一个不分明 L—集。如所作的一样，它记为$\mathscr{R}(\mathscr{A})$，称为$\mathscr{A}$的（直接）$\mathscr{R}$—像，或在$\mathscr{R}$下$\mathscr{A}$的（直接）像。为了完全明确，我们有

$$\mathscr{R}(\mathscr{A})(B)=\bigvee\{\mathscr{R}(R)\cdot\mathscr{A}(A)\mid R(A)=B\},$$

这里 B 是 Y 上的一个 L—集。性质 (1)—(8) 和结合律成立（我们也能利用合成的第二个定义）。

如果$\mathscr{B}$是 Y 上的一个 L—集，合成$\mathscr{B}\circ\mathscr{R}$定义 X 上的一个不分明 L—集，叫做在$\mathscr{R}$下$\mathscr{B}$的原像，记为$\check{\mathscr{R}}(\mathscr{B})$。命题 (1)—(8) 和结合律也成立。

给定$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$和$\mathscr{R}$,二重像 $\mathscr{B}\circ\mathscr{R}\circ\mathscr{A}$是 P 到 P 的一个 L—不分明的 L—关系，即 L^{L} 的一个元素，或一个"不分明值"。

给定$\mathscr{R}$和$\mathscr{A}$，$B\to B^{+}\circ\mathscr{R}\circ\mathscr{A}$给出一个 L^{Y} 到 L^{L} 的映照。类似地考察 $y\to y^{++}\circ\mathscr{R}\circ\mathscr{A}$。如果$*=\wedge$,人们能够利用对偶合成并得到对偶性质。如果$L$是有余格,是用偶然余(occational complement) 给出定义，以获得适当的有余性质。

存在一个范畴$\mathscr{S}(L)$，它的事物是$\mathscr{A}$,态射由$(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{R})\in\mathrm{Mor}(\mathscr{A},\mathscr{B})\Longleftrightarrow\mathscr{R}(\mathscr{A})\leqslant\mathscr{B}$来定义并且存在仅包含函数关系的子范畴$\mathscr{F}(L)$。

命题3 设 A 是 X 上的一个 L—集，S 是 Y 到 X 的一个函数 L—关系，R 是它的相反。则

$S\circ R(A)\leqslant A$.

证明：

$$S\circ R\circ A(x)=\bigvee_{y,\bar{x}}\{A(\bar{x})\bullet R(\bar{x},y)\bullet S(y,x)\}$$

和

$$A(\bar{x})\bullet R(\bar{x},y)\bullet S(y,x)\leqslant A(x)\quad\forall x,\bar{x},y.\ \square$$

如果 R 是函数，即是 $R\circ\check{R}\circ A\leqslant A$。如果 $\bullet=\wedge$，其对偶是 $R\,\hat{\circ}\,\check{R}\,\hat{\circ}\,A\leqslant A$。这样一来已经证明了下述估计（来源于 Zaden [4]）：

命题4. 设 A 是 X 上的一个 L—集，R_i 是 Y 到 X 的函数 L—关系，$\bullet=\wedge$。则

$$\bigvee_i R_i\circ\check{R}_i\circ A\leqslant A\leqslant\bigvee_i R_i\,\hat{\circ}\,\check{R}_i\,\hat{\circ}\,A.$$

完全同样的结果对不分明 L—集 $\mathscr{A}$ 和不分明 L—关系 $\mathscr{R}$，$\mathscr{S}$，$\mathscr{R}_i$ 成立。

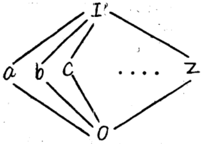
设 R 和 S 是 X 到 Y 的函数关系。如果对 X 上的所有 L—集 A，或 X 上的所有 crisp 单子 A，有 $R(A)=S(A)$，则 $R=S$。类似地，如果 $B\circ R\circ A=B\circ S\circ A$ 对所有 crisp 单子 B，A 成立，则 $R=S$。

8. 判定和格之间的映照

这一节我们略述不定判断的代数理论，它是不分明的而不是统计的。我们给出少数的结果和某些一般的想法。其中的大多数适用于 crisp 判定过程，我们不处理最优判定过程的问题。

当一个不分明集 $A:X\to L$ 可以作为问题的非常适当的描述时，实际上有趣的事情是想得到一个判定或解。一个集 X 上的一个判定函数是一个映照 $d:X\to L_0$，我们称 L_0 为一个判定语言；即 d 是 X 上的一个 L_0—不分明集。这类不分明集与不分明性的直观概念很少有关，但是它却恰好顺应我们的框架。常常，相当的 X 是另一个集 Y 的 L^Y。

自然我们假设 L_0 是至少是一个具 O 和 I 的完备格。如果 d 决定“是”或“否”，$L_0=2$ 如果 d 在 X 内排列随便一个顺次，L_0 是单序。L_0 能够是一个自由分配格或波雷尔代数，它是由基本判定的一个集 D 生成的，或者如果另外其它都是不适当的，L_0 便是直接判定语言，具有如下 Hasse 图解



显然它是不可分配的。$a\in L_0$ 在 d 下的逆像是 X 的子集，对它来说判定 a 被给予，在很多

情形下，判定 O 和 I 将是"互斥"判定。

由一个函数 $A:X\to L$ 到一个函数 $d:X\to L_0$ 的最自然的方法是经过一个函数 $l:L—L_0$。这样一来，本节我们关心的是格之间的映照。

从一个 Closg L_1 到另一个 L_2 的映照 l 可以是多种类型的，例如：一个集映照；一个偏序集同态；一个保持∨或∧的映照；一个格同态；一个完备格同态；一个 Closg 同态；这些中的每一个都能保持 O 和/或 I。同态的这个（偏序）系统给出判定过程的一个代数分类方案。分别考察保持∨，∧和•，它还能稍有扩展。

一个偏序集同态保持≤，不是每个偏序集同态保持∨或∧，而是某些保持这个但不保持另一个。但若一个映照保持∨或∧，易看出它是一个偏序集同态，如果它同时保持∨和∧，由定义它是一个格同态，如果格是单序的，则 l 是一个偏序集同态当且仅当它是一个格同态。

实际中产生的映照在这个系统中趋向稍低，虽然越高，它越具有好的代数性质。我们举一些例子。

设 L 是单序的，定义 t：$L\to 2$ 如下：若 $b<a$ 则 $t(b)=0$；若 $b\geqslant a$，则 $t(b)=I$。t 叫做 a—开始映照（a—threshold mapping），它是一个完备格同态，保持 I 和 O，除非是 $a=o$ 的平凡情形，如果 $L=J$，t 是一个 Closg 同态。这大约是可能遇到的（除过同构）有趣的一个映照（代数说法）。

如前所说的 t 用通常的按坐标的过程诱导出同类 t^n：$L^n\to 2^n$ 的一个同态或更一般的 t^X：$L^X\to 2^X$ 对任一 X 的一个同态。人们甚至对每个坐标能使用不同的 t。

一个有趣的例子出现在模型分类中，假设一个模型由实数的一个 N—向量（像第 2 节中 $N=n^2$）表示。则开始变换（threshold transformation）t^N 以特别好的方式把模型化为二元 N—向量。

我们可以把 J^n 的元素看作 $X=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 上的一个 J—不分明集；用 n 表示$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$。设 $B\in J^n$，我们考察 J^n 到 R 的映照，它被 $A\to\Sigma_i B(i)\bullet A(i)$ 定义，这里 $\bullet$ = 乘法。不失序理论的一般性，我们能规范任 B 使得 $\Sigma_i(B_i)\leqslant 1$；则 W：$J^n\to J$。W 是 A 的坐标的一个加权，如第 1 节中所说的。它是一个偏序集同态，它既不保持∨也不保持∧。W 也能看作 $A\in J^n$ 同 B 的相互关系的估算。对无限下标集 X，和（summation）可由积分代替。我们也能利用 Closg R 或 Z 替代 J。按坐标扩张产生形为 $W=(W_0,\cdots,W_{K-1})$：$J^n\to J^K$ 的偏序集同态。

上述形式的映照 W：$J^N\to J^K$ 可以作为模型分类机器的直接一步，依此 W_i 估算 $A\in J^N$ 同某些模型的原型 $B_i\in J^N$ 的相互关系。

设 $A\in L^X$，考察映照 m：$L^X\to L$，它如下定义

$$A\overset{m}{\longrightarrow}\vee\{A(x)\mid x\in X\}。$$

则 m 保持∨，而 $m(A\bullet B)\leqslant m(A)\bullet m(B)$；这特别对 $\bullet$ = ∧成立，甚至当 L 有一个给定的 $\bullet$ 不同于∧也成立。

按照我们已经构造的模型分类机器，m 应告诉与一个贮藏原型 B_i 的最大相互关系是什么，并且多少应测量判定方案的有效性，这个方案分配 A 到具有一个代表的类，这个类与

A是极大相关的。令$d(A)$表示这个类，是$1,\cdots,K$中之一，或者说，$(K=26)a,\cdots,Z\in L_0$中之一，这里L_0有本节早先给出的哈斯(Hasse)图。

那么映照$l=\text{mow}$（或$l=\text{mowot}$）：$J^N\to J$和d：$J^N\to J_0$是Crisp函数系统，它们描述了这个机器的运算。首先是保序的。实际中重要问题当然与如误差率一类量有关，我们约定这里不讨论它。

我们现在问，在Closg同态下前几节我们是如何定义各种不分明结构的。典型的结果是在范畴论的意义下，一个不分明结构以函子身份出现。

从范畴$\mathscr{C}$到范畴$\mathscr{C}'$的一个协变函子是$\mathscr{C}'$内的事物$T(A)$到C内每个事物A的一个分配，并且是$\mathscr{C}'$内态射$T(f)$：$T(A)\to T(B)$到$\mathscr{C}$内每个态射f：$A\to B$的一个分配，其分配方法为$T(1_A)=1_{T(A)}$和$T(f\circ g)=T(f)\circ T(g)$。我们将写$T$：$\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$。

一个协变函子T诱导从$\text{Mor}\,\mathscr{C}(A,B)$到$\text{Mor}\,\mathscr{C}'(T(A),T(B))$的一个映照，由定义立即推出$T$诱导从$\text{End}(A)$到$\text{End}(T(A))$的一个半群同态和从$\text{Aut}(A)$到$\text{Aut}(T(A))$的一个群同态。同时若$f$：$A\to B$是$\mathscr{C}$内一个群同构，则$T(f)$：$T(A)\to T(B)$是$\mathscr{C}'$内一个同构。

设$\mathscr{C}$是一个范畴，而设l：$L_1\to L_2$是一个closg同态。则l诱导一个函数$l^{\mathscr{C}}$：$L_1^{\mathscr{C}}\to L_2^{\mathscr{C}}$，它的定义是：对$\mathscr{C}$的事物$A$，$l^{\mathscr{C}}(A)=A$；对$F\in L_1^{\text{Mor}(A,B)}$和$f\in\text{Mor}(A,B)$ $l^{\mathscr{C}}(F)(f)=l\circ F(f)$，使得$l^{\mathscr{C}}(F)\in F_2^{\text{Mor}(A,B)}$。一般地说，对$l^{\mathscr{C}}(F)$将写为$lF$。容易证明$l(F\circ G)=lF\circ lG$和$l(1_A)=1_A$使得我们的确有一个函子。

在集范畴$R(L)$和L—关系内，l：$L_1\to L_2$诱导每个事物到自身的，L_1—关系R：$XY\to L_1$到L_2—关系lR：$XY\to L_2$的一个函子$R(l)$。

容易看到上面定义的映照l：$R(X,Y;L_1)\to R(X,Y;L_2)$是一个完备格同态。

我们已经知道l：$R(X;L_1)\to R(X;L_2)$是一个半群同态，因为它来源于$R(L_1)$到$R(L_2)$的函子，并且由于它是一个完备格同态，所以它是一个closg同态。

通常，给定l：$L_1\to L_2$，我们定义l：$\mathscr{R}(X,Y;L_1)\to\mathscr{R}(X,Y;L_2)$为对$\mathscr{R}\in\mathscr{R}(X,Y;L_1)$，$R\in R(X,Y;L_1)$和$\overline{R}\in R(X,Y;L_2)$，$l(\mathscr{R})(\overline{R})=l\bigvee\{\mathscr{R}(R)\mid lR=R\}$。这定义了一个格同态，则$l$给了映每个集到自身和如上映态射的一个函子$\mathscr{R}(l)$：$\mathscr{R}(L)\to\mathscr{R}(L_2)$。

对具不分明集和态射的范畴，情形基本上是相同的。设l：$L_1\to L_2$是一个同态，则我们定义从$S(L_1)$到$S(L_2)$的一个协变函子，这里它映事物A：$X\to L_1$到事物lA：$X\to L_2$和映态射R：$A\to B$，对每个$R\in R(X,Y;L_1)$，到lR：$lA\to lB$，$lR\in R(X,Y;L_2)$。仅需验证

$$R(A)\leqslant B\Rightarrow lR(lA)\leqslant lB,$$

而这是容易的。

对$\mathscr{P}(L)$的情形是类似的。我们定义$l\mathscr{A}$为

$$l\mathscr{A}(\overline{A})=\bigvee(l\mathscr{A}(A)\mid lA=\overline{A}),$$

如上一样讨论。

同样的结果可用同样的方法获得，如果我们限制函数关系，或对$\bullet=\wedge$，我们利用对偶合成。

人们能够把$L^{\mathscr{C}}$和$l^{\mathscr{C}}$看作定义从格范畴到"范畴的范畴"的一个协变。严格地说，不存在

这样的范畴(它怎么是自己的一个元素呢？)，但是当我们取 Mor($\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$) 是所有协变函子 T：$\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 时，范畴的所有公理满足，映照 L 到 $L^{\mathscr{C}}$ 和 l：$L_1\to L_2$ 到 $l^{\mathscr{C}}$：$L_1^{\mathscr{C}}\to L_2^{\mathscr{C}}$ 满足这些范畴之间的一个协变的公理。检验这个论断的最好方法大概是作为一个数学隐喻。

一般地能检验在一个变量时这些不分明结构是双函子，逆变；在格变量情形是协变。

只要 l 保持 $\vee$ 和 $\bullet$ 就够了，因为上面全部是真实的。进一步，如果 $l\bigvee_i a_i\leqslant\bigvee_i la_i$ 和 $l(a\bullet b)\leqslant la\bullet lb$，我们得到，例如 $l(R\circ S)\leq l(R)\circ l(S)$，而不是等式，所以 l 不再完全是一个函子。

参 考 文 献

1.L.A.Zadeh.Fuzzy Sets. Information Control 8(1965).338—353

2.L.A.Zadeh.Fuzzy Sets and Systems."Proceedings of the Symposilum on System Theory,"Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Bro—oklyn,New York.1965.

3.G.D.Birkhoff."Lattice Theory",Vol.XXV,Znded.AMS Colloquium Pu—blications,Providence.1948.

4.S.Lang."Algebra".Addison—Wesley,Reading, Massachusetts,1965

5.L.A.Zadeh AND C.A.Droeser."Linear System Theory."Mcgraw—Hill, New—York,1963.

6.R.Bellman, R.KALABA, AND L.A.ZADEH.Abstraction and pattern classification.J·Math.Anal·Appl·13(1966),1—7

7.L·A·Zadeh. Shadows of fuzzy Sets,Probl.,Transmission of Information 2(1966).37—44(in Russian)·

不分明拓扑空间

C.L.Chang

1.引　言

〔1〕中引入的不分明集概念为把一般拓扑学的许多概念推广到所谓不分明拓扑空间提供了一个自然骨架。为简浩计，我们仅限于解释诸如开集、闭集、邻域、内集、连续性以及紧性这样一些更基本的概念。并且严格仿照Kelley的“一般拓扑学”中给出的定义、定理和证明去作。关于不分明集的记号及术语同〔1〕。

2.不分明拓扑空间

令 $X=\{x\}$是一个点空间。X中的一个不分明集 A，简略说来就是一个具有不分明边界的类。例如，比10大得多的实数类。这种类由A中的一个将每个 x与它的“隶属度”联系起来的隶属（特征）函数 $\mu_A(x)$来表征。我们将假定，μ_A是一个从X到〔0,1〕的函数。但是，像Goguen在〔3〕中所作的那样，我们的许多定义和结果不难推广到 μ_A 是从X到一个格的函数的情形。

定义 2.1　令A和B 是空间$X=\{x\}$中的不分明集。$\mu_A(x)$和$\mu_B(x)$分别表示 x在 A 和 B 中的隶属度　　则，

$A=B\Leftrightarrow\mu_A(x)=\mu_B(x)$　　对所有$x\in X$

$A\subset B\Leftrightarrow\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$　　对所有$x\in X$

$C=A\cup B\Leftrightarrow\mu_C(x)=max〔\mu_A(x),\ \mu_B(x)〕$　　对所有$x\in X$

$D=A\cap B\Leftrightarrow\mu_D(x)=min〔\mu_A(x),\ \mu_B(x)〕$　　对所有$x\in X$

$E=A'\Leftrightarrow\mu_E(x)=1-\mu_A(x)$　　对所有$x\in X$

更一般地，对于不分明集族$\mathcal{A}=\{A_i|i\in I\}$，其和 $C=\bigcup_I A_i$ 与交 $D=\bigcap_I A_i$ 分别由

$\mu_C(x)=\sup_I\{\mu_{A_i}(x)\}$　　$x\in X$

$\mu_D(x)=\inf_I\{\mu_{A_i}(x)\}$　　$x\in X$

定义。

符号ϕ表示不分明空集（对所有的$x\in X$，$\mu_\phi(x)=0$）关于X，我们用对所有的$x\in X$，$\mu_X(x)=1$的函数表示它。

现在我们来定义不分明拓扑空间

定义 2.2　不分明拓扑是满足下列条件的 X 中的不分明集族T：(a)$\phi,X\in T$；(b)若$A,B\in T$,则 $A\cap B\in T$；(c)若$A_i\in T$，$i\in I$，则$\bigcup_I A_i\in T$。

T叫关于X的不分明拓扑，而序对$(X、T)$是不分明拓扑空间，缩写为 fts。T 的每一个

元素叫T—开不分明集。不分明集是T—闭的当且仅当它的余集是T—开的。今后在不致引起混淆时，我们将把T—开（T—闭）不分明集简称为开（闭）集。如同（通常）拓扑，粘不分明拓扑仅包含ϕ和X，而离散不分明拓扑包含所有的不分明集。不分明拓扑U比不分明拓扑T粗 当且仅当$U\subset T$。

定义 2.3 $fts(X, T)$中的不分明集U是不分明集A的一个邻域，缩写为$nbhd$。当且仅当存在一开不分明集O使得$A\subset O\subset U$。

上述定义不同于通常定义之处在于，这里我们考虑不分明集的$nbhd$，而不是考虑点的$nbhd$。

定理 2.1.不分明集A是开的当且仅当对包含于A的每一个不分明集B来说，A都是B的$nbhd$。

证明：⇒：显然。

⇐：因为$A\subset A$，所以存在一个开不分明O使得$A\subset O\subset A$因此$A=O$，于是A是开的

证完

一个不分明集的$nbhd$系是该不分使集的所有$nbhd$族

定理 2.2 设U是一个不分明集的$nbhd$系，则U的有限个元素之交属于U，且包含U的每一个元素的每一不分明集也都属于U。

证明：若R和S是不分明集A的两个$nbhd$，则存在分别包含于R和S的开$nbhd R_{\circ}$和$S_{\circ}$，于是$R\cap S$包含开$nbhd$ $R_{\circ}\cap S_{\circ}$，因此$R\cap S$是A的一个$nbhd$，于是U的两个元素（从而有限个元素）之交仍是U的元素。如果不分明集R包含A的一个$nbhd$，则它包含A的一个开$nbhd$，因此R也是A的一个$nbhd$，故$R\in U$。 证完

（译注者：在定理2.2的条件下，U的任意个元素之和属于U）

定义 2.4 令A、B是$fts(X,T)$中的两个不分明集且$A\supset B$，那么B叫A的一个内部不分明集当且仅当A是B的$nbhd$。A的所有内部不分明集之和叫A的内部，用A°表示。

定理 2.3 设A是$fts(X,T)$中的不分明集，则A°是包含于A的最大开不分明集。而且，不分明集A是开的当且仅当$A=A^{\circ}$。

证明：由定义2.4，显然，A°自身是A的一个内部不分明集，因此，存在一个开不分明集O使得$A^{\circ}\subset O\subset A$，但$O$是$A$的一个内部不分明集，因此，$O\subset A^{\circ}$于是$A^{\circ}=O$且是包含于$A$的最大开不分明集。若$A$是开的，则$A$是$A$的一个内部不分明集，于是$A\subset A^{\circ}$，从而$A=A^{\circ}$。反之显然。 证完

3.不分明集序列

定义 3.1 一个不分明集序列$\{An, n=1.2\cdots\}$最终包含于不分明集A当且仅当存在一个整数m使得只要$n\geqslant m$就有$A_n\subset A$。不分明集序列$\{A_n, n=1.2,\cdots\}$常常包含于不分明集A当且仅当对每个整数m都存在一个整数$n\geqslant m$使得$A_n\subset A$。若不分明集序列$\{A_n, n=1.2,\cdots\}$在$fts(X,T)$之中，说此序列收敛于不分明集A，当且仅当它最终包含于A的每个$nbhd$。

定义 3.2 设N是从非负整数集到非负整数集的映射。序列$\{Bi, i=1\cdots.2\}$是序列$\{Ai, i=1.2\cdots\}$的一个子序列当且仅当存在一个映射N使得$Bi=A_{N(i)}$，并且对每个整数m，存

在一个整数 n 使得只要 $i\geqslant n$ 就有 $N(i)\geqslant m$。

定义 3.3 $fts(X,T)$ 中的不分明集 A 是不分明集序列的一个聚不分明集，当且仅当此序列常常包含于 A 的每个 $nbhd$。

定理 3.1 若 $fts(X,T)$ 中的每个不分明集的 $nbhd$ 系都是可数的，则

(a)不分明集 A 是开的当且仅当收敛于包含在 A 中的不分明集 B 的每一不分明集序列 $\{A_n, n=1.2\cdots\}$ 皆最终包含于 A。

(b)若 A 是不分明集序列 $\{A_i, i=1.2,\cdots\}$ 的聚不分明集，则存在一个收敛于 A 的该序列的子序列。

证明：(a) ⇒：由于 A 是开的，所以 A 是 B 的一个 $nbhd$，因此，$\{A_n, n=1.2,\cdots\}$ 最终包含于 A。

⇐：对每个 $B\subset A$，令 U_1，$\cdots U_n\cdots$ 是 B 的 $nbhd$ 系，作 $V_n=\bigcap_1^n\{U_i\}$，则 $V_1\cdots V_n\cdots$ 是最终包含于 B 的每个 $nbhd$ 的序列，即 $V_1\cdots V_n\cdots$ 收敛于 B。因此存在一个 m 使得只要 $n\geqslant m$ 就有 $V_n\subset A$，V_n 是 B 的 $nbhd$，因此由定理 2.1. A 是开的。

(b)令 $R_1\cdots R_n\cdots$ 是 A 的 $dhbn$ 系，作 $S_n=\bigcap_1^n\{Ri\}$，则 $S_1\cdots S_n\cdots$ 是对每个 n 皆有 $S_{n+1}\subset S_n$ 的序列。对每个非负整数 i 取 $N(i)$ 使得 $N(i)\geqslant i$ 且 $A_{N(i)}\subset S_i$，则 $\{A_{N(i)}\, i=1,2,\cdots\}$ 确实是序列 $\{A_n, n=1.2,\cdots\}$ 的子序列，显然，这个子序列收敛于 A。　　证完

4. F—连续函数

在这一节，我们把连续性概念推广到所谓 F—连续函数的概念上去。作为予备，我们将建立一些由映射所导出的不分明集的性质。

定义 4.1 设 f 是从 X 到 Y 的一个函数，B 是 Y 中具有隶属函数 $\mu_B(y)$ 的不分明集。那么 B 的逆，写作 $f^{-1}[B]$，是 X 中的一个不分明集，其隶属函数由 $\mu_{f^{-1}[B]}(x)=\mu_B(f(x))$ 对所有的 $x\in X$ 来定义。反过来，设 A 是 X 中具有隶属函数 $\mu_A(x)$ 的不分明集，那么，A 的像，写作 $f[A]$，是 Y 中的一个不分明集，其隶属函数由　对所有的 $y\in Y$

$$\mu_{f[A]}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_A(z)\} & \text{若} f^{-1}[y]\neq\phi\\ O & \text{其他}\end{cases}$$

给出，这里，$f^{-1}[y]=\{x|f(x)=y\}$。

定理 4.1 设 f 是从 X 到 Y 的函数，则

(a)对 Y 中任何不分明集 B 有　$f^{-1}[B']=\{f^{-1}[B]\}'$

(b)对 X 中任何不分明集 A 有　$f[A']\supset\{f[A]\}'$

(c) $B_1.B_2$ 是 Y 中二不分明集，且 $B_1\subset B_2$ 则　$f^{-1}[B_1]\subset f^{-1}[B_2]$

(d) A_1，A_2 是 X 中二不分明集且 $A_1\subset A_2$，则　$f[A_1]\subset f[A_2]$

(e)对 Y 中的任何不分明集 B 有　$B\supset f[f^{-1}(B)]$

(f)对 X 中的任何不分明集 A 有　$A\subset f^{-1}(f[A])$

(g)设 f 是 X 到 Y 的函数，g 是从 Y 到 Z 的函数，则对 Z 中任何不分明集 C 有 $(gof)^{-1}[C]=f^{-1}(g^{-1}[C])$，这里 gof 是 g 与 f 的合成。

证明：(*a*)对所有的$x\in X$

$$\mu_{f^{-1}[B']}(x)=\mu_{B'}[f(x)]=1-\mu_B[f(x)]=1-\mu_{f^{-1}(B)}(x)=\mu_{\{f^{-1}[B]\}'}(x)$$

(*b*)对每个$y\in Y$，若$f^{-1}[y]\neq\phi$，则

$$\mu_{f[A']}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_{A'}(z)\}$$

$$=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{1-\mu_A(z)\}$$

$$=1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_A(z)\}$$

而，$\mu_{\{f[A]\}'}(y)=1-\mu_{f[A]}(y)=1-\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_A(z)\}$

因此，$\mu_{f[A']}(y)\geqslant\mu_{\{f[A]\}'}(y)$

(*c*)对X中所有的x有

$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x)=\mu_{B_1}[f(x)]$和$\mu_{f^{-1}[B_2]}(x)=\mu_{B_2}[f(x)]$

又因　$B_1\subset B_2$　所以对所有的$x\in X$有

$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x)\leqslant\mu_{f^{-1}[B_2]}(x)$

因此，$f^{-1}[B_1]\subset f^{-1}[B_2]$

(*d*) $\mu_{f[A_1]}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_{A_1}(z)\}$

$\mu_{f[A_2]}(y)=\sup_{z\in f^{-1}(y)}\{\mu_{A_2}(z)\}$

因 $A_1\subset A_2$，所以对所有$y\in Y$有

$\mu_{f[A_1]}(y)\leqslant\mu_{f(A_2)}(y)$

因此，$f[A_1]\subset f[A_2]$

(*e*)若$f^{-1}[y]\neq\phi$

$$\mu_{f[f^{-1}(B)]}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_{f^{-1}(B)}(z)\}$$

$$=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_B(f(z))\}=\mu_B(y)$$

若　$f^{-1}[y]=\phi$　　则

$\mu_{f[f^{-1}(B)]}(y)=O$

因此，对所有的$y\in Y$　有

$\mu_{f[f^{-1}(B)]}\leqslant\mu_B(y)$

(*f*) 对所有　$x\in X$

$$\mu_{f^{-1}[f(A)]}(x)=\mu_{f(A)}[f(x)]$$

$$=\sup_{z\in f^{-1}[f(x)]}\{\mu_A(z)\}\geqslant\mu_A(x)$$

(*g*) 对所有　$x\in X$

$\mu_{(g\circ f)^{-1}[C]}(x)=\mu_C\{(g\circ f)(x)\}=\mu_C\{g[f(x)]\}$

$= \mu_{g^{-1}[c]}\{f(x)\} = \mu_{f^{-1}[g^{-1}[c]]}(x)$ 证完

现在定义F—连续性

定义 4.2 从fts(X,T)到fts(Y,U)的函数f是F—连续的当且仅当每一个U—开不分明集的逆是T—开的。

显然，若 f：$(X,T)\to(Y,U)$和g：$(Y,U)\to(Z,V)$都是F—连续函数，则合成gof：$(X,T)\to(Z,V)$是F—连续函数。这是因为，对Z中的每个不分明集V有$(gof)^{-1}[V]=f^{-1}[g^{-1}(V)]$，利用g和f的$F$—连续性可得，若$V$是开的，则$(gof)^{-1}[V]$也是开的。

定理 4.2 若X和Y是fts，f是X到Y的函数则下述五个条件间有如下关系：$(a)\Leftrightarrow(b)$；$(c)\Leftrightarrow(d)$；$(a)\Rightarrow(c)$；$(d)\Rightarrow(e)$。

(a)函数f是F—连续的；

(b)每个闭不分明集的逆是闭的；

(c)对X中的每个不分明集A，$f[A]$的每个nbhd的逆是A的nbhd；

(d)对X中的每个不分明集A及$f[A]$的每个nbhd V都存在A的一个nbhd W使得$f[W]\subset V$；

(e)对于X中收敛于不分明集$A\subset X$的每一不分明集序列$\{A_n, n=1.2,\cdots\}$，序列$\{f[A_n], n=1.2,\cdots\}$收敛于$f[A]$。

证明：$(a)\Leftrightarrow(b)$此为下述事实的直接结果。这个事实是：对Y中的每个不分明集B有，$f^{-1}[B']=\{f^{-1}[B]\}'$。

$(a)\Rightarrow(c)$，若f是F—连续的，A是X中不分明集，V是$f[A]$的nbhd，则V包含一个$f[A]$的开nbhd W 由于$f[A]\subset W\subset V$，所以$f^{-1}[f[A]]\subset f^{-1}[W]\subset f^{-1}[V]$而$A\subset f^{-1}[f[A]]$且$f^{-1}[W]$是开的，故$f^{-1}[V]$是$A$的nbhd。

$(c)\Rightarrow(d)$，取$W=f^{-1}[V]$，则它是A的nbhd，且$f[W]=f[f^{-1}(V)]\subset V$。

$(d)\Rightarrow(c)$，令V是$f[A]$的nbhd，则存在A的nbhd W使得$f[W]\subset V$因此，$f^{-1}[f[W]]\subset f^{-1}[V]$此外，由于$W\subset f^{-1}[f(W)]$可见$f^{-1}[V]$是$A$的nbhd。

$(d)\Rightarrow(e)$，若V是$f[A]$的任一nbhd，则存在A的一个nbhd W使得$f[W]\subset V$，由于$\{A_n, n=1.2,\cdots\}$最终包含于W，即存在一个m使得只要$n\geqslant m$就有$A_n\subset W$所以，对所有的$n\geqslant m$有$f[A_n]\subset f[W]\subset V$。因此$\{f[A_n], n=1.2,\cdots\}$收敛于$f[A]$ 证完

一个不分明同胚是一个其逆也是F—连续的fts X到fts Y上的F—连续的一对一映射。若一个不分明空间到另一个不分明空间上存在一个不分明同胚，则说这两个不分明空间是F—同胚的。并且每一个都是另一个的不分明同胚。两个fts拓扑F—等价当且仅当它们是F—同胚的。

5.紧致不分明空间

现在我们考虑关于不分明拓扑结构的不分明紧致空间。

定义 5.1 不分明集族$\mathcal{A}$是不分明集B的一个复盖当且仅当$B\subset U\{A|A\in\mathcal{A}\}$，它是一个开复盖当且仅当$\mathcal{A}$的每个元素都是开不分明集。$\mathcal{A}$的一个子复盖也是复盖$B$的$\mathcal{A}$的一个子族。

定义 5.2 fts(X,T)是紧致的当且仅当它的每一个开复盖都有一个有限子复盖。

定义 5.3 不分明集族$\mathcal{A}$具有有限交性质当且仅当$\mathcal{A}$的每个有限子族的元素之交非空。

定理 5.1 fts 是紧致的当且仅当具有有限交性质的每一个闭不分明集族都具有非空交。

证明 若$\mathcal{A}$是 fts(X,T) 中不分明集族，则$\mathcal{A}$是X的复盖当且仅当$\cup\{A|A\in\mathcal{A}\}=X$或者当且仅当$[\cup\{A|A\in\mathcal{A}\}]'=X'=\phi$，由$DeMorgan$公式[①]当且仅当$\cap\{A'|A\in\mathcal{A}\}=\phi$，因此，不分明空间$X$是紧致的当且仅当$X$中每一个不具有复盖$X$的有限子族的开不分明集族都不复盖$X$，而这就等价于$X$中每一个具有有限交性质的闭不分明集族都具有非空交。 证完

定理 5.2 设f是映紧致fts X到fts Y上的F—连续函数，则Y是紧致的。

证明：令$\mathbf{B}$是Y的一个开复盖，由于对所有的$x\in X$。

$$\mu_{\bigcup\limits_{B\in\mathbf{B}} f^{-1}(B)}(x)=\sup_{B\in\mathbf{B}}\{\mu_{f^{-1}(B)}(x)\}$$

$$=\sup_{B\in\mathbf{B}}\{\mu_B[f(x)]\}=1$$

所以对$\mathbf{B}$中的B，形如$f^{-1}[B]$的所有不分明集族是X的具有有限子复盖的开复盖。然而由f是在上的，易见对Y中的任何不分明集B有$f[f^{-1}(B)]=B$。于是，于复盖的元素的像族是一个复盖Y的有限子族，从而Y是紧致的。 证完

6.结束语

本文呈现的结果表明，一般拓扑学中的许多基本概念可以容易地拓广到不分明拓扑空间上去。虽然不分明集理论尚在初期阶段，但它却显示出具有广泛应用的希望。

①译者注：不难证明$De\ Morgan$公式对不分明集成立。

参考文献

1. L.A.Zadeh Fuzzy sets Inform. Control. 8 (1965)338—353
2. J.L.Kelley "General Topology" Van Nostrand Princeton New Jersey 1955.
3. J.A.Goguen L—Fuzzy sets J.Math. Anal. Appl. 18 (1967)145—174

（本文译自 J.Math.Anal.Appl 24(1968)182—190）

（赵万忠译）

不分明拓扑(的)多重系统

Gregory J.Nazaroff

1.引 言

不分明系统的研究，取决于*Zadeh*在〔1〕中所引出的不分明集的概念，这一研究工作也已由*Zadeh*在〔2〕中、*Bellman*和*Zadeh*在〔3〕中展开了，在〔3〕中列有大量完整的有关文献。本文由研究不分明拓扑的多重系统的概念，而完成对原先在不分明系统方面的工作的抽象化和形式化。同样地，于此报导的理论，可以认为是对于由*Bushaw*在〔4〕中及*Halkin*在〔5,6〕中所得到的结果的不分明化。不分明拓扑多重系统的理论结构是建基于原来由*Halkin*所给定的基础之上的，并要用到*Chang*在〔7〕中的拓扑手段。在第2节对那些在后面的分析中所要用到的关于不分明集和不分明拓扑空间的性质，给出一简短的提要。第3节包含了不分明拓扑多重系统进行形式化的内容。在第4节中表述和讨论了事件的不分明可达集的概念。第5节给出了不分明最佳控制问题的定义。第6节以最佳性的不分明化原则和最佳逼近的形式表述了最佳性的必要条件。第7节中包括了关于结论的注记。

2.预 备

设$X=\{x\}$表示一个点空间。X中的不分明集A定义作有序偶对的集合$A=\{(x,\mu_A(x))$: $x\in X\}$，在此通过$X\to M$的映射$\mu_A(x)$用以表示x在A中的隶属度。本文中，M将取作区间〔0,1〕。

现将那些在不分明拓扑多重系统形式化特别有用的，有关不分明集和不分明拓扑空间的性质列举如下：

定义 2.1 设A和B是X中的不分明集，其相应的隶属函数是$\mu_A(x)$和$\mu_B(x)$。另外设用A^c表示A的补集，用符号$\vee$和$\wedge$相应地表示并（上确界）和交（下确界）。则$\forall x\in X$

$$A=B\Leftrightarrow\mu_A(x)=\mu_B(x)$$

$$A\subset B\Leftrightarrow\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$$

$$A\cup B\Leftrightarrow\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x)$$

$$A\cap B\Leftrightarrow\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)$$

$$A^c\Leftrightarrow\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x)。$$

定义 2.2 若$A=\{A_i;\ i\in I\}$其中I表示指标集，A_i是不分明集，则$\forall x\in X$

$$C=\bigcup_I A_i\Leftrightarrow\mu_c(x)=\bigvee_I\{\mu_{A_i}(x)\}$$

$$D=\bigcap_I A_i\Leftrightarrow\mu_D(x)=\bigwedge_I\{\mu_{A_i}(x)\}。$$

显然，对于空不分明集Φ和空间X，其隶属函数相应地是$\mu_A(x)=0$和$\mu_X(x)=1$。

定义 2.3 不分明拓扑空间是偶对$(X,\mathscr{X})$，其中$\mathscr{X}$是X中如下的不分明集族：

(a)$\phi, X\in\mathscr{X}$；

(b)如果$A,B\in\mathscr{X}$，则$A\cap B\in\mathscr{X}$；

(c)若$A_i\in\mathscr{X}$，$\forall i\in I$，则$\bigcup_I A_i\in\mathscr{X}$。

$\mathscr{X}$的每一个元素称作拓扑开不分明集。一个不分明集是拓扑闭集，当且仅当它的补集是拓扑开集。若一个拓扑$\mathscr{X}$包含X的所有不分明集，则专门称为离散拓扑，而若一个拓扑$\mathscr{X}$只包含Φ和X则专门称作粘拓扑。

定义 2.4 $(X,\mathscr{X})$中的不分明集C是不分明集A的邻域，当且仅当存在一个开不分明集B使得$A\subset B\subset C$。

定义 2.5 从偶对$(X_1,\mathscr{X}_1)$到另一个偶对$(X_2,\mathscr{X}_2)$的函数f是不分明连续的，当且仅当$\mathscr{X}_2$中的每一个开不分明集的原象在$\mathscr{X}_1$中是开集。

定义 2.6.不分明同胚是从偶对$(X_1,\mathscr{X}_1)$到偶对$(X_2,\mathscr{X}_2)$上的不分明连续的、一一对应的映射，且其逆映射也是不分明连续的。如果存在由一个不分明空间到另一个不分明空间上的不分明同胚，则这两个不分明空间称作是不分明同胚的，且每一个是另一个的不分明同胚象。

定义 2.7 $Y=\{y\}$中的不分明集B称作被限制在$x(x\in X)$上，如果它的隶属函数依赖于x作为一个参变量或符号化地记为$\mu_B(y|x)$。对于每一$x\in X$，$\mu_B(y)$可被表作。

$$\mu_B(y)=\bigvee_x\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y|x)\}。$$

有关不分明拓扑空间的更多的细节和一些有关的概念，读者可查阅文〔7〕。

3.不分明拓扑多重系统

设$E=\{e\}$称作事件空间，其元素称作事件。E可被一个时间结构作用于其上，则按假设$E=X\times R^1$，其中R^1表示实线。$k(e)$表示一个标明了时间的事件，其中k称作时钟，它是E在R^1上的射影。

设$r(u)$表示E上的一个二元关系：$e_1r(u)e_2$即指事件e_2跟随于事件e_1之后。根据如上所设，$r(u)$是传递的，反身的(自反的)，反对称的和前向的（意即，$e_1r(u)e_2$和$e_1r(u)e_3$ ⟹ $e_2r(u)e_3$或$e_3r(u)e_2$）。$u\in F$，此处F是一个称作策略空间的抽象空间，它的元素称作策略。

设S是$E\times E$中的不分明集，而U是F中的不分明集。把关系$e_1r(u)e_2$和测度$\mu_s(e_1)$，$\mu_s(e_2)$和$\mu_U(u)$联系起来，则可以确定一个不分明弹道为：

$$t(e_1,e_2,u)=\{e;e_1r(u)e\}\cap\{e;er(u)e_2\}$$

或者符号化

$$t=S_1\cap S_2，其中S_1\cap S_2\subset S。$$

用隶属函数的术语来表达以上各项我们有：

$\mu_{S_1\cap S_2}(t)=\mu_{S_1\cap S_2}(e)=\mu_{S_1}(e)\wedge\mu_{S_2}(e)\leqslant\mu_S(e)$、显然，$e_2$依赖于$e$和$u$作为参变量，或

如在第2节所定义的，有$\mu_s(e_2|e,u)$。于是，对于关系$e\,r(u)e_2$，测度$\mu_s(e_2)$被下式给定：

$\mu_s(e_2)=\bigvee_e\bigvee_u\{\mu_s(e)\wedge\mu_U(u)\wedge\mu_s(e_2|e,u)\}$。类似地，

$\mu_s(e)=\bigvee_{e_1}\bigvee_u\{\mu_s(e_1)\wedge\mu_U(u)\wedge\mu_s(e|e_1,u)\}$。将$\mu_s(e)$的表达式代入到$\mu_s(e_2)$中，且注意到$\wedge$和$\vee$的分配律，得出

$\mu_s(e_2)=\bigvee_e\bigvee_{e_1}\bigvee_u\{\mu_s(e_1)\wedge\mu_v(u)\wedge\mu_s(e_2|e,u)\wedge\mu_s(e|e_1,u)\}$。具有这样一些性质的系统可以被形式化，即用一个确定的三元系$(E,\xi,r(u))$作为一个不分明拓扑系统，其中偶对(E,ξ)表示一个不分明拓扑空间。为了简化某些证明的结构，做如下的假设是必要的。设对于所有的e_1，$e_2\in E$，$A\in\xi$和$e_1r(u)e_2$及$e_1\in A$存在$B\in\xi$其使得$e_2\in B$而

$B\subset\{e':er(u)e',e\in A\}=C\Rightarrow\mu_B(e_2)\leqslant\mu_C(e_2)$。如果定义一个集$R$，如$R=\{r(u),\forall u\in U\}$，则三元系$\{(E,\xi,r(u)),\forall u\in U\}$可以用三元系$(E,\xi,R)$来代替，而表示不分明扣扑多重系统。

通过更多的一些直观的观察，可以作出关于不分明拓扑多重系统如下：

命题 3.1 有$e_1,e_2,e_3,\in S$和$r(u_1),r(u_2)\in R$，使得$e_1r(u_1)e_2,e_2r(u_2)e_3$，则存在$r(u)\in R$使得$e_1r(u)e_2$和$e_2r(u)e_3$。

证： 设$e_2r(u)e'$。由$r(u)$的传递性，我们有$e_1r(u)e'$。由假设，$k(e')\geqslant k(e_2)$，因而$e_2r(u_2)e'$。则直接得到$e_1r(u)e_2$和$e_2r(u)e_3$。

定义 3.1 两个不分明拓扑多重系统(E_i,ξ_i,R_i)，$i=1.2$是不分明同构的，如果存在不分明同胚α和β使得α：$(E_1,\xi_1)\longleftrightarrow(E_2,\xi_2)$，$\beta$：$R_1\longleftrightarrow R_2$和一个同胚$r$：$R'\longleftrightarrow R'$，此$r$是保序的，使得$\alpha(e_1)\beta(R_1)e=e_1R\alpha(e_2)$，其中$e_1,e_2\in\xi_1,e\in\xi_2$且$k_2(\alpha(e_2))=rk_1(e_2)$。

4．可达事件的不分明集

设A是E中的一个不分明集，且$e_1\in A$，则集

$K(e_1)=\{e_2:e_1r(u)e_2$，对某$u\in U\}$，是由e_1构作的可达的不分明集。显然，对于不分明集A的可达的不分明集可以表示作

$$K(A)=\bigcup_{e_1\in A}K(e_1)$$

其中

$$\mu_{K(A)}(e_2)=\bigvee_{e_1\in A}\{\mu_{K(e_1)}(e_2)\}。$$

命题 4.1 若$e_1\in k(e)$，则

$K(e_1)\subset K(e)$，且$\mu_{K(e_1)}(e_2)\leqslant\mu_{K(e)}(e_1)$其中$e_2\in k(e_1)$。

证： $e_1\in k(e)\Longleftrightarrow er(u_1)e_1$，对某些$u_1\in U$。设$e_2\in k(e_1)$则$e_1r(u_2)e_2$，对某些$u_2\in U$。由命题3.1存在$r(u)$使得$er(u)e_1$，且$e_1r(u)e_2$。因为$r(u)$是传递的$er(u)e_2$，这意味着$e_2\in k(e)$，根据定义即得$\mu_{K(e_1)}(e_2)\leqslant\mu_{K(e)}(e_1)$。

在引出主要的结果以前，将先讨论不分明集$\mathring{A}$，$\dot{A}$，∂A，$\overline{A}$它们分别表示不分明某A的内部，外部，边界和闭包。

定义 4.1 设$A\subset(E,\ \xi)$，则A的内部是所有包含在A中的ξ一开集的并。

$$\overset{\circ}{A}=\bigcup_{I}\{B_{I}:B_{I}\subset A\}。$$

A的外部是所有和A不相交的ξ—开集的并。

$$\overset{\bullet}{A}=\bigcup_{I}\{C_{I}:C_{I}\subset A^{c}\}。$$

从上述的定义显然有：

$$0\leqslant\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)=\bigvee_{I}\{\mu_{B_I}(e)\}\leqslant\mu_{A}(e)\leqslant1,$$

和

$$0\leqslant\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e)=\bigvee_{I}\{\mu_{C_I}(e)\}\leqslant1-\mu_{A}(e)\leqslant1。$$

于是集$\overset{\circ}{A}$和$\overset{\bullet}{A}$是不分明可测的。联系∂A中的事件和它们在$\overset{\circ}{A}$和$\overset{\bullet}{A}$中的测度可引出下述的命题。

命题 4.2 设$A\subset(E,\ \xi)$，则$e\in\partial A$的充分必要条件是$\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\neq1$或$\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e)\neq1$。

证：从初等集合论的知识，我们知道$(\partial A)^{c}=\overset{\circ}{A}\cup\overset{\bullet}{A}$或用隶属函数的术语表述作

$\mu_{(\partial A)^c}(e)=\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\vee\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e)$。

于是由定义2.1立即得知$\mu_{\partial A}(e)=1-(\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\vee\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e))$。显然，$e\in\partial A$的充分必要条件是$\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\neq1$或$\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e)\neq1$。

定义 4.2 $A\subset(E,\ \xi)$，其闭包$\overline{A}$是所有包含A的ξ—闭集的交：

$$\overline{A}=\bigcap_{I}\{D_{I}:A\subset D_{I}\}。$$

从定义 4.2 很显然有

$$0\leq\mu_{A}(e)\leq\mu_{\overline{A}}(e)=\bigwedge_{I}\{\mu_{D_I}(e)\}\leq1.$$

于是$\overline{A}$是不分明可测的。因为$\overline{A}=\overset{\circ}{A}\cup\partial A$，则$\overline{A}$的隶属函数可以表示作

$$\mu_{\overline{A}}(e)=\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\vee(1-(\mu_{\overset{\circ}{A}}(e)\vee\mu_{\overset{\bullet}{A}}(e)))。$$

命题4.3 如果A是E中的不分明集，$e_{1}\in A$，$e_{1}r(u)e_{2}$，且$e_{2}\in\partial K(A)$，则$t(e_{1},\ e_{2},\ u)\subset\partial K(A)$。

证、显然。若$e_{1}\in A$且$e_{1}r(u)e_{2}$则$t(e_{1},e_{2},u)\subset K(e_{1})\subset K(A)$。证明中其余的部分用反证法。设$e_{1}\in t(e_{1},\ e_{2},\ u)$且$\mu_{\overset{\bullet}{K}(A)}(e)=1$。由关于$e$的假设，我们有$er(u)e_{2}$。设$B\in\zeta$和$e\in B\subset K(A)$。因此存在$C\in\zeta$和

$e_{2}\in C\subset\{e':\ er(u)e',\ e\in B\}\Rightarrow e_{2}\in C\subset K(A)$。这是一个矛盾。

5．不分明最优控制问题

定义5.1 关于三元系（E, ζ, R）的最优控制问题是五元系（E, ζ, R, S, f）其中S是$E\times E$中的非空不分明集。而f：$T\to R^1$，其中

$T=\{t(e_1, e_2, u)$：$(e_1, e_2, u)\in S\times\bigcup$，$e_1Re_2\}$且是非不分明的。

（E, ζ, R, S, f）的解，是由寻找某些$t(e_1, e_2, u)\in T$使得$f(t(e_1, e_2, u))$是极小化的而得到。最佳解则将被界定作（e_1, e_2, u°），这里对E中的某些非空不分明集A, B；$e_1\in A$, $e_2\in B$, $e_1r(u^\circ)e_2$，且对所没$e\in B\bigcap K(A)$有$f(t^\circ(e_1, e_2, u^\circ))\leq f(t(e_1, e_2, u))$。借助于第2节和第4节我们有

$$\mu_{B\cap K(A)}(e_2)=\mu_B(e_2)\wedge\mu_{K(A)}(e_2)=\bigvee_{e_1\in A}\{\mu_B(e_2)\wedge\mu_{K(e_1)}(e_2)\}.$$

（E, ζ, R, S, f）将被假设为非退化的。

6．可佳性的必要条件

命题6.1（可佳性的不分明原则）若（e_1, e_2, u°）是（E, ζ, R, S, f）的解，且$e_1r(u^\circ)e_1'$其中$K(e_1')\leq K(e_2)$，则（e_1', e_2, u°）是（E, ζ, R, S, f）的解。

证：设（e_1', e_2, u°）不是（E, ζ, R, S, f）的解。则存在某些$U\neq u^\circ$，使得$e_1'r(u)e_2$。然而根据命题3.1存在$r(u')$使得$e_1r(u')e_2'$且$e_1'r(u')e_2$。若$U'\neq u^\circ$则违反$e_1r(u^\circ)e_1'$的假设。因而$U'=u^\circ$。

命题6.2（最佳逼近的不分明原则）若（e_1, e_2, u°）是（E, ζ, R, S, f），则$t^\circ(e_1, e_2, u^\circ)\subset\partial K(A)$，其中$e_1\in A$，且$A$，$K(A)$是$E$中的非空不分明集。

证：设$e_1r(u^\circ)e_2$，并设$e_2\notin\partial K(A)$。因为$K(A)$是非空集，则$\mu_{\dot{K}(A)}(e_2)\neq 1$。于是

不分明集$K(A)$是e_2的邻域，因为根据非退化性的假设，存在$e\in B\bigcap K(A)$使得$f(t(e_1, e_2, u)<f(t^\circ(e_1, e_2, u^\circ))$。这与假设矛盾。由此知（$e_1$, e_2, u°）是（E, ζ, R, S, f）的解。于是$e_2\in\partial K(A)$，即由命题4.3知$t^\circ(e_1, e_2, u^\circ)\subset\partial K(A)$。

7．结　论

不必更多地去提到新开始（研究）的关于动态不分明多重系问题的各方面。许多问题出自于由*Bushaw*在〔8〕中关于分明的（*crisp*）动态多重系中继承下来和增加了不分明化的维数。作者认为特别重要的那些研究领域是可控制的且可观察的弹道的稳定性和存在性。

由于种种原因，本文没有在更抽象的模式下去分析动态不分明多重系。更多的方面或许可以由*Bushaw*的双重（E, r）得到，其中r是一个半序且定义E上的一个拓扑。

参 考 文 献

1．L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965), 338—353

2. L. A. Zadeh. Toward a Theory. of Fuzzy Systems, NASACR—1432 (1969)
3. R. E. Bellman and L. A. Zadeh, Decision Making in a Fuzzy Environment. NASA CR—1594(1970),
4. D. Bushaw. Dynamical Polysystems and optimization, Contr. Differential Eqn. 2 (1963), 351—365.
5. H. Halkin, Topological aspects of optimal control of dynamical polysystems. Contr. Differential Eqn、3 (1964). 377—385,
6. H. Halkin, On the necessary Condition for optimal Control of nonlinear systems,J, Anal, Math, 12 (1964). 1—82.
7. C, L. Chang. Fuzzy topological spaces, J. Math, Anal. Appl. 24 (1968), 182—190.
8. D. Bushaw. Dynamical polysystems: A.Survey, in "proc. U. S—Japan Seminar on Differential and Functional Equations", W.A.Benjamin, New Yowk, 1967. 13—24.
(本文译自J. Math. Anal. Appl. 41(1973)478—485)
（刘畅畅、李崇靖译）

不分明拓扑空间的复盖性质

C. K. Wong

1. 引　言

自Zadch在其经典论文〔1〕中提出不分明集以后，不仅在应用方面而且在一般理论方面进行了大量的研究工作。

本文继续在〔2〕中所提出的关于不分明拓扑空间的理论的推广，进而讨论这些空间的各种覆盖性质。即：开覆盖的有限子覆盖（紧性）；可列开覆盖的有限子覆盖（可列紧性）；开覆盖的可列子覆盖（lin-delof）。除了类似于那些在一般拓扑学中证明了的结果，我们还要通过隶属函数与其水平集〔1〕来解释这些性质的特点和意义。

通常紧性这一概念包括下面四种类型：紧性、可列紧性、序列紧性和半紧性。一个拓扑空间是序列紧的，当且仅当每一个序列有一个极限；一个拓扑空间是半紧的，当且仅当每一个序列有一个聚点。这些空间具有很多有趣的性质，并且已被广泛研究。可惜的是，在不分明拓扑空间的理论中，与此类似的部分却很少是有用的，这我们将在最后一节看到。

本文的目的有三个方面：(i)促进〔2〕中所提出的不分明拓扑空间的推广。(ii)仅用不分明集特有的概念来解释一些性质的特点和意义。(iii)表明一般拓扑和不分明拓扑之间的一些偏差。

2. 预　　备

设X＝｛x｝是一个点空间。X中的不分明集A，是被X到［0，1］的隶属函数$\mu_A(x)$所界定的。

定义2.1　设A和B是X中的不分明集。则

$$A=B\Leftrightarrow\mu_A(x)=\mu_B(x)\qquad \text{对每一}x\in X,$$

$$A\subset B\Leftrightarrow\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\qquad \text{对每一}x\in X,$$

$$C=A\cup B\Leftrightarrow\mu_C(x)=max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]\qquad \text{对每一}x\in X,$$

$$D=A\cap B\Leftrightarrow\mu_D(x)=min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]\qquad \text{对每一}x\in X,$$

$$E=A'\ \Leftrightarrow\mu_E(x)=1-\mu_A(x)\qquad \text{对每一}x\in X。$$

更一般地，对于不分明集族$\mathscr{A}=\{A_i\mid i\in I\}$，其并$C=\bigcup_i A_i$和交$D=\bigcap_i A_i$，定义作

$$\mu_c(x)=\sup_I\left\{\mu_{A_i}(x)\right\},\qquad x\in X,$$

$$\mu_D(x)=\inf_I\left\{\mu_{A_i}(x)\right\},\qquad x\in X。$$

符号Φ用来表示空的不分明集（$\mu_\Phi(x)=0$，对每一$x\in X$）、至于X，我们有定义$\mu_X(x)=1$，对每一$x\in X$。

定义2.2　不分明拓扑是X中满足下列条件的不分明集族$\mathscr{T}$：

(a)　Φ，$X\in\mathscr{T}$。

(b)　若A，$B\in\mathscr{T}$，则$A\cap B\in\mathscr{T}$。

(c)　若对每一个$i\in I$都有$A_i\in\mathscr{T}$，则$\bigcup_i A_i\in\mathscr{T}$。

$\mathscr{T}$称为X的不分明拓扑，偶对（$X,\mathscr{T}$）称为不分明拓扑空间，简记为fts。$\mathscr{T}$的每一个元素称作$\mathscr{T}$一开不分明集（或简称开集）。

定义2.3　设f是点空间X到Y的一个函数。设B是Y中的不分明集，且其隶属函数为$\mu_B(x)$。则B的原象记作$f^{-1}[B]$，它是X中的不分明集，其隶属函数定义为：

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x)=\mu_B(f(x))\qquad \text{对每一}x\in X。$$

相反地，设A是X中的不分明集，它的隶属函数为$\mu_A(x)$。A的象记作$f[A]$，它是Y中的不分明集且隶属函数由下式给定，对每一$y\in Y$：

$$\mu_{f[A]}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\left\{\mu_A(z)\right\}\qquad \text{如果}f^{-1}[y]\text{非空},$$

$$=0\qquad \text{其它情况。}$$

其中$f^{-1}[y]=\{x\mid f(x)=y\}$。

定义2.4　从fts（$X,\mathscr{T}$）到fts（$Y,\mathscr{U}$）的函数f是F一连续的，当且仅当每一个$\mathscr{U}$一开不分明集的原象是$\mathscr{T}$一开不分明集。

不分明同胚是一个从$fts\ X$到$fts\ Y$上的F一连续、一一对应的映射，且其逆映射也是F一连续的。若存在由一个不分明空间到另一个不分明空间上的一个不分明同胚，则这两个不分明空间称为是F一同胚的，且每一个是另一个的不分明同胚像。两个不分明拓扑空间是拓扑F一等价的，当且仅当它们是F一同胚的。

3. 覆盖性质

定义3.1 设（$X,\mathscr{T}$）是不分明拓扑空间，X中一不分明集族$\mathscr{A}$是X中不分明集B的覆盖，当且仅当有$B\subset\bigcup\{A\mid A\in\mathscr{A}\}$时，当且仅当$\mathscr{A}$中的每一个元素都是开不分明集时，它是$B$的一个开，即开覆盖。当$\mathscr{A}$的子族也是一个覆盖时，则称此子族是$\mathscr{A}$的子覆盖。

定义3.2 fts叫做紧空间，当且仅当它的每一个开覆盖有有限的子覆盖。

定义3.3 fts叫做可列紧空间，当且仅当它的每一个可列开覆盖有有限的子覆盖。

定义3.4 fts被称作C_{11}空间，若存在$\mathscr{T}$的一个可列子族$\mathscr{B}$，而能使$\mathscr{T}$的每一个元素可被表作$\mathscr{B}$的一些元素的并。

定理3.1 若fts（$X,\mathscr{T}$）是C_{11}空间，则紧性和可列紧性是等价的。

证明：（$\Longrightarrow$）对任一fts（$X,\mathscr{T}$），紧性蕴含着可列紧性。

（$\Longleftarrow$）设$\mathscr{A}=\{A_i\}$，（$i\in I$），是X的任一开覆盖。每一$A_i\in\mathscr{A}$，A_i是$\mathscr{B}=\{B_n\}$，（n=1,2,3……）中的元素的并，即

$$A_i=\bigcup_{k=1}^{i_0}B_{i_k}$$

其中i_0可以是无穷。$\mathscr{B}_0=\left\{B_{i_k}\right\}$，$i\in I$，$1\leqslant k\leqslant i_0$构成$X$的一个可列开覆盖。由假设存在有限子覆盖$\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_0$。由于$\mathscr{B}_1$中的每一个元素被包含在元素$A_i$之中，即这些$A_i$构成$\mathscr{A}$的有限子族，且是$X$的覆盖。

定理3.2 设f是从紧的（可列紧的）$fts\ X$到$fts\ Y$上的F—连续函数，则Y是紧的（可列紧的）。

证明：设$\mathscr{B}$是Y的开覆盖（可列开覆盖），则因为对于所有的$x\in X$有：

$$\mu_{\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}f^{-1}[B]}(x)=\sup_{B\in\mathscr{B}}\left\{\mu_{f^{-1}[B]}(x)\right\}=\sup_{B\in\mathscr{B}}\left\{\mu_B(f(x))\right\}=1$$

所有形如$f^{-1}[B]$，$B\in\mathscr{B}$的不分明集的集族是X的一个开覆盖。其有有限的子覆盖。因为f是X到Y上的函数，意即$f[f^{-1}[B]]=B$。因此，此子覆盖的元素之象的集族是$\mathscr{B}$的有限子族，且其覆盖了Y。因而Y是紧的（可列紧的）。

其次，我们将给出不分明拓扑空间特有的关于紧性和可列紧性的特征。

给定一个覆盖$\mathscr{A}=\{A_i\}$，$i\in I$，此即表示对于每一$x\in X$有$\sup_{i\in I}\{\mu_{A_i}(x)\}=1$。因此，对任一个$0<\varepsilon<1$和每一$x\in X$存在不分明集$A_i$，使得$\mu_{A_i}\geqslant1-\varepsilon$。对每一$x\in X$，选择这样的一个$A_i$，且把具有相同的$A_i$的点$x$的全体集拢在一起，并用$\Gamma_{i,\varepsilon}$表示这些点$x$的全体为元之集。对于固定的$\varepsilon$，$\{\Gamma_{i,\varepsilon}\}$构成$X$的一个划分，我们称它为相关于$\mathscr{A}$的一个$\varepsilon$—划分，要指出的是，这个划分依赖于初始的那些各$A_i$的选择。

若更进一步，对于每一$x\in X$存在A_i使得$\mu_{A_i}=1$，则把具有相同的A_i的点x的全体集拢起来，并记作$\{\Gamma_{i,0}\}$。则此时称$\mathscr{A}$为X的一个0—划分。

我们有下述的特征定理。

定理3.3 fts（$X,\mathscr{T}$）是紧的（可列紧的）充要条件是每一个开覆盖（可列开覆盖）

有X的一个有限0一划分。

证明：（$\Longrightarrow$）设$\mathscr{A}=\{A_i\}$，$i\in I$，是X的一个开覆盖(可列开覆盖)。由假设，它有有限子覆盖$\mathscr{A}_0=\{A_K\}$，$K=1,2,\cdots\cdots,n$。因为对每一$x\in X$有$\max\Big(\mu_{A_1}(x),\cdots\cdots,\mu_{A_n}(x)\Big)=1$，故可以用$\mathscr{A}_0$构造一个0一划分，在此因$\mathscr{A}_0$是有限的集族，所以此0一划分是有限的。而$\mathscr{A}_0$是$\mathscr{A}$的子族，因此$A_0$的0一划分也是相关于$\mathscr{A}$的0一划分。

（$\Longleftarrow$）设$\mathscr{A}$有有限的0一划分$\{\Gamma_{K,0}\}$，$k=1,2,\cdots\cdots,n$。设A_K是确定$\Gamma_{K,0}$的各不分明集。显然$\{A_K\}$，$K=1,2,\cdots\cdots,n$是$\mathscr{A}$的有限子覆盖。

作为定理3.3的结果，可得出下述的检定法则。

推论3.1 如果存在X的一个开覆盖$\mathscr{A}$和一点$x\in X$，使得对所有的$A_i\in\mathscr{A}$总有$\mu_{A_i}(x)<1$，则$(X,\mathscr{T})$不是紧的（可列紧的）。

定义3.5 fts$(X,\mathscr{T})$是Lindelof空间，当且仅当X的每一个开覆盖有可列子覆盖。

定理3.4 若fts$(X,\mathscr{T})$是C_{II}空间，则它也是Lindelof空间。

证明：设$\mathscr{A}=\{A_i\}$，$i\in I$是X的一个开覆盖。每一个A_i是$\mathscr{T}$的可列子族$\mathscr{B}=\{B_n\}$，n=1,2,……的元素的并，即

$$A_i=\bigcup_{K=1}^{i_0}B_{i_K}$$

此处i_0可以是无穷。$\mathscr{B}_0=\Big\{B_{i_k}\Big\}$，$i\in I$，$1\leqslant k\leqslant i_0$，构成$X$的开覆盖。又因$\mathscr{B}_0$是$\mathscr{B}$的子族故它是可列的。根据上述构造$\mathscr{B}_0$的方法，知$\mathscr{B}_0$的每一个元素被包含于某一$A_i$之中。所有这种$A_i$构成$\mathscr{A}$的可列子覆盖。

用如前同样的论证，我们有下述结论。

定理3.5 设f是从Lindelof fts X到fts Y上的F一连续函数，则Y是Lindelof空间。

定理3.6 fts$(X,\mathscr{T})$是Lindelof空间的充分必要条件是对于所有的ε，此处$0<\varepsilon<1$，每一个开覆盖有X的一个可列ε一划分。

证明：（$\Longrightarrow$）往$\mathscr{A}$是一开覆盖，则$\mathscr{A}$有可列子覆盖$\mathscr{A}_0=\{A_K\}$，$k=1,2,\cdots\cdots$。对于每一个$0<\varepsilon<1$，可以用$\mathscr{A}_0$构造X的一个ε一划分。因为$\mathscr{A}_0$是可列的，故显然划分是可列的。因为$\mathscr{A}_0$是$\mathscr{A}$的子族，故X的关于$\mathscr{A}_0$的ε一划分也是X关于$\mathscr{A}$的ε一划分。

（$\Longleftarrow$）设$\mathscr{A}$是一个开覆盖。对于每一个$0<\varepsilon<1$，设$\{\Gamma_{i,\varepsilon}\}$，$i\in I(\varepsilon)$是$X$相关于$A$的可列$\varepsilon$一划分。设$\Gamma_{i,\varepsilon}$是由$\mathscr{A}$的元素$A_{i,\varepsilon}$所确定的。$\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，$n=2,3,\cdots\cdots$。则不分明集族$\{A_{i,\varepsilon}\}$，$i\in I(\varepsilon)$，$\varepsilon=\dfrac{1}{n}$，$n=2,3,\cdots\cdots$。构成$\mathscr{A}$的一个可列子覆盖。

4．例

在本节，通过表述不分明拓扑空间的两个简单的例子来说明其各个概念的意义。

Ⅰ．半连续不分明拓扑

我们若设X有（通常意义下的）拓扑$\mathscr{F}$，设$A^{*)}$是X中的不分明集。令$P_{A,\alpha}=\{x\mid\mu_A$

$(x)>\alpha$，$\alpha\in[0,1)$。因此$\Gamma_{A,\alpha}$就是X的（通常意义下的）子集。考察X中的不分明集A的集族$\mathscr{T}$，于是对每一个$\alpha\in[0,1)$，$\Gamma_{A,\alpha}$是在拓扑$\mathscr{T}$下的开集。

$(X,\mathscr{T})$是fts。因为的确有Φ，$X\in\mathscr{T}$，及若A、$B\in\mathscr{T}$则$C=A\cap B$也是$\mathscr{T}$的元素，因为$\mu_C(x)=\min(\mu_A(x),\ \mu_B(x))$，意即$\Gamma_{C,\alpha}=\Gamma_{A,\alpha}\cap\Gamma_{B,\alpha}$对每一$\alpha\in[0,1)$类似地，对于不分明集族$\{A_i\}$，$i\in I$。

$$\Gamma_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\alpha}=\bigcup_{i\in I}\Gamma_{A_i,\alpha},$$

因为$sup_i\left(\mu_{A_i}(x)\right)>\alpha$，意即至少存在一个$A_i$使得$\mu_{A_i}(x)>\alpha$。

注意，X中所有具有连续隶属函数的不分明集都是开集。

设B_x是一个具有连续隶属函数μ_{B_x}的不分明集，μ_{B_x}确定如下：

$$\mu_{B_x}(y)=\begin{cases}1 & \text{当}y=x\text{时，}\\ <1 & \text{其它情况。}\end{cases}$$

因此集族$\{B_x\}$，$x\in X$，构成$(X,\mathscr{T})$的开覆盖。显然，若X不是有限集，则其无有限子覆盖。因而$(X,\mathscr{T})$不是紧空间。

设$\{V_n\}$，n＝1,2,……。是X中不相交的子集的可列集族，且它们的并是X。考察具有如下连续隶属函数的不分明集族$\{B_n\}$，n＝1,2,……。

$$\mu_{B_n}(y)=\begin{cases}1 & \text{当}y\in V_n\text{时，}\\ <1 & \text{其它情况。}\end{cases}$$

显然$\{B_n\}$ n＝1,2,……。是$(X,\mathscr{T})$的可列开覆盖，如果所有这些V_n是非空的，则$\{B_n\}$没有有限子覆盖，因此$(X,\mathscr{T})$不是可列紧空间。

Ⅰ．半离散不分明拓扑

设$X=\{x\}$是一个点空间。设$\alpha<1$是给定的。在所有确定于X上的不分明集的集族中，考察下列的子族$\mathscr{T}_\alpha=\{A_\beta\}$，其中$\beta\in[0,\alpha]$或$\beta=1$。而$A_\beta$是具有隶属函数$\mu_{A_\beta}(x)=\beta$，对每一$x\in X$，的不分明集。显然$(X,\mathscr{T}_\alpha)$是一个fts。事实上，$(X,\mathscr{T}_\alpha)$是平凡紧空间、平凡列紧空间和平凡Lindelof空间，因为X的仅有的开覆盖是X本身。

设R是区间$[0,\alpha]$上的有理数集。考察$\mathscr{T}_\alpha$的子族$\mathscr{B}=\{A_\beta\}$，$\beta\in R$或$\beta=1$。则$\mathscr{T}_\alpha$的每一个元素，可以被表示作族$\mathscr{B}$*中的元素的并。因而$(X,\mathscr{T}_\alpha)$是C_{II}空间。

最后我们指出，两个半离散不分明拓扑空间$(X,\mathscr{T}_\alpha)$，$(X,\mathscr{T}_{\alpha'})$是$F$一等价的，其充分必要条件是$\alpha=\alpha'$。

证明：（$\Leftarrow$）显然。

（$\Rightarrow$）设f是从$(X,\mathscr{T}_\alpha)$到$(X,\mathscr{T}_{\alpha'})$上的函数，且$\alpha<\alpha'$则不分明开集$A_{\alpha'}$的原像将是$(X,\mathscr{T}_\alpha)$中的不分明集，且其具有如下的隶属函数。

$$\mu_{f^{-1}[A_{\alpha'}]}(x)=\mu_{A_{\alpha'}}\Big(f(x)\Big)=\alpha'。$$

它不是$(X,\mathscr{T}_\alpha)$中的开集。因为$\alpha'>\alpha$。故知从$(X,\mathscr{T}_\alpha)$到$(X,\mathscr{T}_{\alpha'})$上的函数都不是连续的。特别，它们不能是$F$一等价的。

* 译者注：原文误为$\mathscr{A}$。

5．紧性的其它类型

我们将继续沿用在〔2〕中所引出的关于收敛性和聚类的定义，并将相应地推广序列紧性和半紧性的概念。遗憾的是，当指出一般拓扑和分不明拓扑的一些差别时，可以得知这样的推广不是很有用的。

定义5.1 不分明集序列｛A_n｝，n＝1，2，……。称作收敛到不分明集A，当且仅当对每一个包含A的开不分明集O，存在一个正整数m，使得当$n\geqslant m$时，A_n被包含在O之中。

定义5.2 不分明集A称作是不分明集序列｛A_n｝n＝1，2，……的聚不分明集，当且仅当对每一个包含A的开不分明集O，和每一个正整数m，存在$n\geqslant m$使得A_n包含于O中。

定义5.3 fts（$X,\mathscr{T}$）是序列紧的，当且仅当每一个不分明集序列有收敛的子序列。

定义5.4 fts（$X,\mathscr{T}$）是半紧的，当且仅当每一个不分明集序列有一聚不分明集。

定理5.1 每一个不分明集序列｛A_n｝，n＝1，2，……，有极限，此极限可以不是唯一的。因而每一个fts都是序列紧的和半紧的。

证明：设不分明集A定义作$A=\bigcup_n A_n$，则A_n收敛到A，因为任一个包含A的开集也必包含所有的A_n，n＝1，2，……。而且任何一个包含A的不分明集也是｛A_n｝的极限。

从这个定理可以看出，为了在这方面进一步发展这一理论，收敛和聚类的新的概念是必要的。一旦这一点成功地做到，可以预示关于不分明拓扑的更完满的理论，而它将是同一般拓扑有重大的差别的。

参 考 文 献

1．L.A.Zadch, Fuzzy sets. Information and Control 8(1965), 338—353

2．C.L.Chang. Fuzzy topological spaces. J.Math.Anal.Appl. 24（1968），191—201。

3，J.L.Kelley. "General Topology"，Van Nostrand, princeton, N.J 1955。

（本文译自 J.Math.Appl 43（1973） 697—704）

（李崇靖、刘畅畅译）

（接106页）

参 考 文 献

1．L.A.Zadch, Fuzzy sets, Information and Control 8（1965），338—353。

2．C.L.Chang, Fuzzy topological spaces,J,Math.Anal.Appl.24(1968), 191—201。

3．C.K.Wong, Covering properties ot fuzzy topology spaces. J.Math. Anal.Appl. 43(1973), 697—704。

4．J.L.Kelley,"General Topology," Van Nostrand,Princeton,NJ,1955。

（本文译自J.Math.Anal 45（1974）512—521）

（李崇靖、刘畅畅译）

不分明拓扑：积和商定理

C.K.Wong

1．引　言

本文是在文［1—3］中所引出的不分明拓扑空间的性质的研究的继续。Zadeh 的经典性文章〔1〕中引出了不分明集的基本概念，由此奠定了不分明数学的基础。不分明拓扑空间、理论是不分明数学的一个分支。

在所研究的问题中，当所有的隶属函数仅取值 0 和 1 的场合下，一般拓扑可以被看作是不分明拓扑的特殊情况。因而我们可以想见在不分明拓扑的情况下有较弱的结果。本文论证了其中的一些。与此同时，指出了这些结果是在目前范围内所能获得的最好的结果。

在［2，3］中，讨论了不分明拓扑的一些基本性质。在此，我们感兴趣的是由给定的不分明拓扑生成新的不分明拓扑及研究某些性质传递的条件。以下，在这种想法下，引出和研究了积不分明拓扑和商不分明拓扑。

2．预　备

设$X=\{x\}$是一个点空间。X中的不分明集A，是被X到单位区间［0,1］的隶属函数$\mu_A(x)$所界定的。

定义2.1　设A和B是X中的不分明集。则

$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x)$　　对每一$x\in X$，

$A\subset B \Leftrightarrow \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$　　对每一$x\in X$，

$C=A\cup B \Leftrightarrow \mu_C(x)=\max[\mu_A(x),\mu_B(x)]$　　对每一$x\in X$，

$D=A\cap B \Leftrightarrow \mu_D(x)=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]$　　对每一$x\in X$，

$E=A' \Leftrightarrow \mu_E(x)=1-\mu_A(x)$　　对每一$x\in X$。

更一般地，对于不分明集族$\mathscr{A}=\{A_i \mid i\in I\}$其并$C=\bigcup_I A_i$和交$D=\bigcap_I A_i$，定义作

$$\mu_C(x)=\sup_I\{\mu_{A_i}(x)\},\qquad x\in X,$$

$$\mu_D(x)=\inf_I\{\mu_{A_i}(x)\},\qquad x\in X。$$

符号Φ用来表示空的不分明集（$\mu_\Phi(x)=0$，对每一$x\in X$）。至于X，我们有定义$\mu_X(x)=1$，对每一$x\in X$。

定义2.2　不分明拓扑是X中满足下列条件的不分明集族$\mathscr{T}$：

(a)Φ，$X\in\mathscr{T}$。

(b)若A，$B\in\mathscr{T}$，则$A\cap B\in\mathscr{T}$。

(c)若对每一个$i\in I$都有$A_i\in\mathcal{T}$，则$\bigcup_i A_i\in\mathcal{T}$。

$\mathcal{T}$称为X的不分明拓扑，偶对（$X,\mathcal{T}$）称为不分明拓扑空间，简记为fts。$\mathcal{T}$的每一个元素称作$\mathcal{T}$一开不分明集（或简称开集）。一个不分明集是$\mathcal{T}$一闭的（或简称闭集），当且仅当它的补集是$\mathcal{T}$一开的。

如同在一般拓扑中一样，粘不分明拓扑仅包含Φ和X，可是离散不分明拓扑包含所有的不分明集。

定义2.3 设f是点空间X到Y的一个函数。设B是Y中的不分明集，且其隶属函数为$\mu_B(x)$。则B的原象记作$f^{-1}[B]$，它是X中的不分明集，其隶属函数定义为：

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x)=\mu_B\Big(f(x)\Big)\qquad\text{对每一}x\in X。$$

相反地，设A是X中的不分明集，它的隶属函数为$\mu_A(x)$，A的象记作$f[A]$，它是Y中的不分明集且隶属函数由下式给定，对每一$y\in Y$：

$$\mu_{f[A]}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in f^{-1}[y]}\left\{\mu_A(z)\right\}, & \text{如果}f^{-1}[y]\text{非空，}\\ =0 & \text{其它情况。}\end{cases}$$

其中：$f^{-1}(y)=\{x\,|\,f(x)=y\}$

定义2.4 从fts（$X,\mathcal{T}$）到fts（$Y,\mathcal{U}$）的函数f是F—连续的，当且仅当每一个$\mathcal{U}$—开不分明集的原象是$\mathcal{T}$—开不分明集。

定理2.1 从fts（$X,\mathcal{T}$）到fts（$Y,\mathcal{U}$）的函数f是F—连续的充分必要条件是每一个$\mathcal{U}$—闭不分明集的原象是$\mathcal{T}$—闭的。

证：见[2]。

不分明同胚是一个从fts X到fts Y上的F—连续、一一对应的映射，且其逆映射也是F—连续的。若存在由一个不分明空间到另一个不分明空间上的一个不分明同胚，则这两个不分明空间称为是F—同胚的，且每一个是另一个的不分明同胚像。两个不分明拓扑空间是拓扑F—等价的，当且仅当它们是F—同胚的。

3．积不分明拓扑

定义3.1设$\mathcal{T}$是一不分明拓扑，$\mathcal{T}$的子族$\mathcal{B}$是相应于$\mathcal{T}$的一个基，当且仅当$\mathcal{T}$的每一个元素可以被表作$\mathcal{B}$中的某些元素的并。

定义3.2 设$\mathcal{T}$是一不明拓扑，$\mathcal{T}$的子族φ是相应于$\mathcal{T}$的一个次基，当且仅当φ*⁾的元素的有限交组成的集族构成$\mathcal{T}$的一个基。

设{X_α}，$\alpha\in I$是空间的一集族。设$X=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$是通常意义下的积空间，且设$P_\alpha$是从空间$X$到空间$X_\alpha$的射影。

更进一步假设每一X_α是不分明拓扑空间，与之相应的不分明拓扑为$\mathcal{T}_\alpha$。设$B\in\mathcal{T}_\alpha$，则根据定义2.3，$P_\alpha^{-1}[B]$是X中的不分明集。不分明集族φ＝{$P_\alpha^{-1}[B]\,|\,B\in\mathcal{T}_\alpha,\alpha\in I$}，现在下述意义下被用来生成相应于$X$的不分明拓扑$\mathcal{T}$：令$\mathcal{B}$是所有的由φ的元素的有限交组成的集族。令$\mathcal{T}$是$B$的元素的任意并组成的集族。显然，$\mathcal{T}$确实是相应于$X$的一个不分明拓扑，且它以$\mathcal{B}$作为基，以φ作为次基。

定义3.3 给定一不分明拓扑空间集族{($X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha$)}，$\alpha\in I$。如上述所确定的不分明拓

*⁾原文将φ误印为S一译者注

扑$\mathscr{T}$称作$X=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$的积不分明拓扑。而（$X,\mathscr{T}$）称作积不分明拓扑空间。

从这一定义可立即得到一些结果，兹列举如下。

定理3.1 设$(X,\mathscr{T})$是不分明拓扑空间集族$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\},\alpha\in I$的积不分明拓扑空间。

(i)对于每一个$\alpha\in I$，射影P_α是F—连续的。

(ii)积不分明拓扑是相应于X而使(i)为真的最小的不分明拓扑。

(iii)设（$Y,\mathscr{U}$）是不分明拓扑空间，设f是从Y到X的一个函数，则f是F—连续的充要条件是对于每一个$\alpha\in I$，$P_\alpha\circ f$是F—连续的。

证：(i)和(ii)由积不分明拓扑的定义即可得。

(iii)($\Longrightarrow$)显然。

($\Longleftarrow$)设$B\in\mathscr{T}_\alpha$，则$(P_\alpha\circ f)^{-1}[B]=(f^{-1}\circ P_\alpha^{-1})[B]$是$\mathscr{U}$—开的。因此$\left\{f^{-1}[P_\alpha^{-1}[B]]\right\},B\in\mathscr{T}_\alpha,\alpha\in I$是$Y$中$\mathscr{U}$—开的不分明集族。注意$\mathscr{T}$的每一个元素是族$\left\{P_\alpha^{-1}[B]\right\}$，$B\in\mathscr{T}_\alpha$，$\alpha\in I$的元素有限交的并，且$f^{-1}$保持并和交。即可得知$f^{-1}$把$\mathscr{T}$—开不分明集上映射到$\mathscr{U}$—开不分明集；因此$f$是$F$—连续的。

定义3.4 fts（$X,\mathscr{T}$）称作C_{11}空间，如果存在相应于$\mathscr{T}$的可数基$\mathscr{B}$。

以下，我们将得到关于C_{11}空间的积定理。请注意不分明拓扑和一般拓扑之间的差别。

定理3.2 设$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha=1,2,\cdots\cdots$。是一串$C_{11}$型fts的可列族，则积fts（$X,\mathscr{T}$）仍是$C_{11}$空间。

证：设$\mathscr{B}_\alpha$是相应于$\mathscr{T}_\alpha$的一个可数基。设$\mathscr{U}=\left\{P_\alpha^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}_\alpha\right\}$，$\alpha=1,2,\cdots\cdots$。且设$\mathscr{B}$是所有的$\mathscr{U}$的元素的有限交组成的集族。则$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的可数子族。我们将指出$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的基。设$F\in\mathscr{T}$。根据积不分明拓扑的定义，$F$是形为$\bigcap_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}^{-1}[A_i]$的开不分明集的并，其中$A_i\in\mathscr{T}_{\alpha_i}$。因此$\mathscr{B}_{\alpha_i}$是$\mathscr{T}_{\alpha_i}$的基，

$$A_i=\bigcup_{j_i\in J_i}B_{j_i},\qquad B_{j_i}\in\mathscr{B}_{\alpha_i},$$

因而

$$P_{\alpha_i}^{-1}[A_i]=P_{\alpha_i}^{-1}\Big[\bigcup_{j_i\in J_i}B_{j_i}\Big]=\bigcup_{j_i\in J_i}P_{\alpha_i}^{-1}\Big[B_{j_i}\Big]。$$

注意，一般地

$$\Big(\bigcup_{i\in I}C_i\Big)\cap\Big(\bigcup_{j\in J}D_j\Big)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}P_{\alpha_i}^{-1}\Big(\big(C_i\cup D_j\big)\Big),$$

其中C_i，D_j是不分明集。这可以很容易地推广到有限个的交。因而，

$$\bigcap_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}^{-1}[A_i]=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j_i\in J_i}\Big[B_{j_i}\Big]$$

是$\mathscr{U}$的元素的有限交的并，于是即得知$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的基。

以下我们将指出，C_{11}空间的不可数积可能不再是C_{11}空间；因此在某种意义上说，上述的结果是可以达到的最好的结果。

定理3.3 设$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha\in I$，是不可数个$C_{11}$空间的集族，并使得

(i)没有任何一个是粘的

(ii)在每一个fts（$X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha$）中，对于每一个$F\in\mathscr{T}_\alpha$而$F\neq\Phi$，存在一点$x\in X_\alpha$使得

$\mu_F(x)=1$，其中μ_F是F的隶属函数。

则积不分明拓扑空间（$X,\mathscr{T}$）不是C_{II}空间。

证：根据积不分明拓扑的定义，$\mathscr{T}$有一个基$\mathscr{B}_0$，它具有如下形式的元素：

$$B_0=\bigcap_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}^{-1}\left[A_{\alpha_i}\right],\quad A_{\alpha_i}\in\mathscr{T}_{\alpha_i}.$$

则根据(ii)，$P_\alpha[B_0]=X_\alpha$，当$\alpha\neq\alpha_i$，$i=1,2,\cdots\cdots n$且$B_0\neq\Phi$。确实，设$x_i\in X_{\alpha_i}$使得$\mu_{A_{\alpha_i}}(x_i)=1$，$i=1,2,\cdots\cdots n$。设$x_\alpha\in X_\alpha$。考察$X$的子集

$$S=\{x_1\}\times\cdots\times\{x_n\}\times\{x_\alpha\}\times\prod_{\substack{\beta\neq\alpha_i,\\ i=1,2,\cdots,n,\\ \alpha\neq\beta}}X_\beta$$

则对于所有的$s\in S$，$\mu_{B_0}(s)=1$。因此$\mu_{P_\alpha[B_0]}(x)=1$。因为x_α是任意地选定的，于是得知$P_\alpha[B_0]=X_\alpha$。

现若（$X,\mathscr{T}$）是C_{II}空间，则$\mathscr{T}$有一个可数的基$\mathscr{B}=\{B_i\}$，$i=1,2,\cdots\cdots$，对于$\mathscr{B}$中的每一个$B_i\neq\Phi$，存在$\mathscr{B}_0$的元素$B_0\neq\Phi$使得$B_i\supset B_0$，也就是说

$$B_0=\bigcap_{i=1}^{n}P_{\alpha_i}^{-1}\left[A_{\alpha_i}\right],\qquad A_{\alpha_i}\in\mathscr{T}_{\alpha_i}\ 。$$

则$P_\alpha[B_i]\supset P_\alpha[B_0]=X_\alpha$，当$\alpha\neq\alpha_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。因而$P_\alpha[B_i]=X_\alpha$，当$\alpha\neq\alpha_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。对$\mathscr{B}$的所有元素依此类推。即得知存在指标集$I$的可数子集$K$使得对于任一个$\alpha\in I-K$，$P_\alpha[B_\alpha]=X$对所有的$B_i\neq\Phi$成立。因为$I$是不可数的，故可存在$\alpha_0\in I-K$。因此对所有的$B_i\neq\Phi$，$P_{\alpha_0}[B_i]=X_{\alpha_0}$。根据假设$X_{\alpha_0}$不是粘的，因而存在一个开不分明集$A_0$，$A_0\neq\Phi$、$X_\alpha$；$P_{\alpha_0}^{-1}[A_0]$是$\mathscr{T}$中的开不分明集。根据基的定义，存在$\mathscr{B}$的一个元素$B_i\neq\Phi$使得$P_\alpha^{-1}[A_0]\supset B_i$，因而

$$P_{\alpha_0}\left[P_{\alpha_0}^{-1}[A_0]\right]\supset P_{\alpha_0}[B_i]=X_{\alpha_0}$$

另一方面$P_{\alpha_0}\left[P_{\alpha_0}^{-1}[A_0]\right]=A_0$。于是矛盾。

在可数性之后，我们将提出一个关于紧空间的积定理。也将再次看到与一般拓扑的偏差是明显的。首先让我们来复述一些定义。

定义3.5 设（$X,\mathscr{T}$）是fts。不分明集族$\mathscr{A}$是不分明集B的覆盖，当且仅当$B\subset\bigcup\{A\mid A\in\mathscr{A}\}$。其是一个开覆盖，当且仅当$\mathscr{A}$中的每一个元素都是开不分明集。$\mathscr{A}$的子覆盖是$\mathscr{A}$的一个子族，它仍还是一个覆盖。

定义3.6 一个fts是紧空间，当且仅当此空间的每一个开覆盖有有限子覆盖。

定义3.7 一个fts是可列紧空间，当且仅当此空间的每一个可列开覆盖有有限子覆盖。

我们还需要下述的定义。

定义3.8 设X是一个点空间。设Q是X的一个子集。不分明集族$\mathscr{A}$是Q的一个覆盖，当且仅当$\{sup_{A\in\mathscr{A}}\mu_A(x)\}=1$，对每一$x\in Q$。

定理3.4 设$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha=1,2,\cdots\cdots,n$。是紧的（可列紧的）fts的有限集族。则积不分明拓扑空间（$X,\mathscr{T}$）也是紧空间（可列紧空间）。

证：若能指出当$n=2$时定理为真就足够了。在此情况下，积不分明拓扑可以被界定如下：

$$\mathscr{T}=\{A_1\times A_2\mid A_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha,\ \alpha=1,2\}$$

其中$A_1\times A_2$是X中的不分明集，其隶属函数为

$$\mu_{A_1\times A_2}(x_1,x_2)=\min\left(\mu_{A_1}(x_1),\mu_{A_2}(x_2)\right)。$$

我们将仅对紧性的情形证明此定理。因为可列紧性的情况与此相似。

设$\mathscr{A}=\{B_i\}$，$i\in I$是积fts$(X,\mathscr{T})$的一个开覆盖。设

$B_i=A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}$，$A_1^{(i)}\in\mathscr{T}_1$，$A_2^{(i)}\in\mathscr{T}_2$，，对每一$i\in I$

设y是X_2中的任一点，考察X的子集$S_y=X_1\times\{y\}$。对任意的$\delta>0$，设$V_{y,\delta}$是$\mathscr{A}$的如此的子族，以致$A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta}$，当且仅当对至少一点$x_1\in X_1$有$\mu_{A_1^{(i)}}(x_1)>1-\delta$和$\mu_{A_2^{(i)}}(y)>1-\delta$。因而$V_{y,\delta}$构成子集$S_y$的一个开覆盖。至此，只要注意到若$(x,y)\in S_y$，根据$\mathscr{A}$的定义，则存在$\mathscr{A}$的可数子族$\left\{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}\right\}$，$k=1,2,\cdots\cdots$。使得

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x,y)=1$$

因此对充分大的k有$A_1^{(k)}\times A_1^{(k)}\in V_{y,\delta}$。不失一般性，我们可以假设$\left\{A_1^{(k)}\times A_1^{(k)}\right\}$，$k=1,2,\cdots\cdots$。是$V_{y,\delta}$一个子族。对所有的$(x,y)\in S_y$依此类推则可断定$V_{y,\delta}$包含$S_y$的一个覆盖。

设$W_{y,\delta}=\left\{A_1^{(i)}\;\middle|\;A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta}\right\}$。则$W_{y,\delta}$是$(X_1,\mathscr{T}_1)$的一个开覆盖，因为对任意的$x\in X_1$存在$V_{y,\delta}$的可数子族$\left\{A_1^{(k)}\times A_1^{(k)}\right\}$ $k=1,2,\cdots\cdots$。使得

$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_{A_1^{(i)}\times A_2^{(k)}}(x,y)=1$；因而$\lim\limits_{k\to\infty}\mu_{A_1^{(k)}}(x)=1$。由$(X_1,\mathscr{T}_1)$的紧性，存在$W_{y,\delta}$的有限子覆盖，记为$Z_{y,\delta}$。对每一个$A_1^{(i)}\in Z_{y,\delta}$选择一个$A_2^{(i)}$使为$A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta}$。这样构成的有限族$\left\{A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\right\}$将称作$H_{y,\delta}$，且相应的$A_2^{(i)}$的有限族将称作$G_{y,\delta}$。$G_{y,\delta}$中的元素是$\mathscr{T}_2$—开不分明集。设它们的交是$D_{y,\delta}$。则$D_{y,\delta}$在$(X_2,\mathscr{T}_2)$中是开集。对所有的$y\in X_2$和所有的$\delta>0$依此类推。很明显，集族$\{D_{y,\delta}\}$，$y\in X_2,\delta>0$，构成$(X_2,\mathscr{T}_2)$的一个开覆盖。由$(X_2,\mathscr{T}_2)$的紧性，知存在有限子覆盖，比如说$\left\{D_{y_i,\delta_i}\right\}$，$i=1,2,\cdots\cdots,m$。最终$\left\{H_{y_i,\delta_i}\right\}$，$i=1,2\cdots\cdots,m$。构成$\mathscr{A}$的有限子覆盖。它是有限的，因为它是有限集族的有限类。注意到对任意的$(x,y)\in X$，存在D_{y_i,δ_i}使得$\mu_{D_{y_i}\delta_i}(y)=1$，则即看出它是一个覆盖。因此对所有的$A\in G_{y_i,\delta_i}$，$\mu_A(y)=1$。另一方面，存在$B\in Z_{y_i,\delta_i}$使得$\mu_B(x)=1$。選择$H_{y_i,\delta_i}$的元素且使$B$作为第一个坐标，即$B\times B_0$，则

$\mu_{B\times B_0}(x,y)=1$，因为$B_0\in G_{r_1,\delta_1}$。

下面的反例将表明在某种意义上定理3.4是能够期望的结果中最好的一个。

定理3.5　存在紧的（可列紧的）fts的可列集族，使得积不分明拓扑空间不是紧空间（可列紧空间）

证：设Y是任意的一个点空间。设n是任意的正整数。设A_n是Y中的不分明集，其隶属函数为$\mu_{A_n}=1-(1/n)$，对每一$y\in Y$。设$X_n=Y$，并设$\mathscr{T}_n=\{\Phi,A_n,Y\}$。则$(X_n,\mathscr{T}_n)$是紧的(可列紧的)fts，因为$X_n$是$X_n$仅有的开覆盖。因而，可数族$\{(X_n,\mathscr{T}_n)\}$，$n=1,2,\cdots$的积fts不是紧空间（可列紧空间）。

关于这一点，可注意不分明集$P_n^{-1}[A_n]$有隶属函数

$$\mu_{P_n^{-1}[A_n]}=1-1/n \qquad \text{对所有的} x\in X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

根据积fts的定义，族

$$\varphi=\left\{\Phi,X,P_n^{-1}[A_n],\ n=1,2,\cdots。\right\}$$

借助先取有限个的交，然后取这些交的并，可用来生成积不分明拓扑$\mathscr{T}$。很显然，积不分明拓扑所生成的正是φ本身。族$\left\{P_n^{-1}[A_n]\right\}$ $n=1,2,\cdots$，是$(X,\mathscr{T})$的一个开覆盖（可列开覆盖），而它没有有限子覆盖。

4. 商不分明拓扑

在本节，我们讨论构造新的不分明拓扑的另一方法，它可以当作是积不分明拓扑的对偶。

设X是一个点空间。设R是定义于X上的一个等价关系。设X/R是通常意义下的商集，且设P是从X到X/R上的通常意义下的射影。

若$(X,\mathscr{T})$是fts，在X/R上可以定义不分明拓扑使得P是F—连续的，定义如下。设$\mathscr{U}$是在X/R中，由式$\mathscr{U}=\{B\mid P^{-1}[B]\in\mathscr{T}\}$所定义的不分明集族。则$\mathscr{U}$是一不分明拓扑，称为相应于$X/R$的商拓扑，而$(X/R,\mathscr{U})$称为商不分明拓扑空间（商fts）。

我们有相似于定理3.1的结果。

定理4.1　(i)商不分明拓扑是使P为F—连续的最大的不分明拓扑。

(ii)设$(Y,\mathscr{V})$是fts。设g是从商fts$(X/R,\mathscr{U})$到$(Y,\mathscr{V})$的函数。则g是F—连续的充分必要条件是$g\circ P$是F—连续的。

证：(i)不足赘述。

(ii)($\Longrightarrow$)由F—连续函数的复合是F—连续的事实即得。

($\Longleftarrow$)设$V\in\mathscr{V}$则由假设，$(g\circ P)^{-1}[V]=P^{-1}[g^{-1}[V]]$在$(X,\mathscr{T})$中是开的。再由商不分明拓扑的定义，$g^{-1}[V]$在$(X/R,\mathscr{U})$是开的。由是g是$F$—连续的。

定义4.1　从fts$(X,\mathscr{T})$到fts$(Y,\mathscr{V})$的函数被称为是F—开的（F—闭的），当且仅当它将$(X,\mathscr{T})$中的不分明开(闭)集上映射到$(Y,\mathscr{V})$中的不分明开(闭)集。

定理4.2　设f是从fts$(X,\mathscr{T})$到fts$(Y,\mathscr{V})$上的F—连续函数且f是F—开的或F—闭的两者之一，则存在X上的等价关系R使得$(Y,\mathscr{V})$ F—同胚到商fts$(X/R,\mathscr{U})$。

证： 在X上定义一关系R，其符合于当且仅当$f(x)=f(y)$时x对y有R关系。则R是一等价关系。如通常一样x的等价类将表为$[x]$。从$(Y,\mathscr{V})$到$(X/R,\mathscr{U})$定义一函数h如下。设$y\in Y$，则存在一$x\in X$，使得$f(x)=y$。定义$h(y)=[x]$，则h是一一对应上映射。依定理4.1(ii)，h^{-1}是F—连续的，因为$f=h^{-1}\circ P$是F—连续的。如果f是F—开的，设Q是X/R中一开不分明集，则$P^{-1}[Q]$在$(X,\mathscr{T})$中是开的，且

$$f\left[P^{-1}[Q]\right]=h^{-1}\left[P(P^{-1}[Q])\right]=h^{-1}[Q]$$

在$(Y,\mathscr{U})$中是开的。因此，h是F—连续的。如果f是F—闭的，则设Q是X/R中一闭不分明集。用同样的方法论证，则可断定h是F—连续的。

定义4.2 设A是fts$(X,\mathscr{T})$中的不分明集。设R是X上的一个等价关系。因此X被分解成互不相交的子集$\varnothing=\{X_i\}$，$i\in I$（$x,y\in X_i$，当且仅当它们有R关系）。在X中定义两个新的不分明集A_1,A_2，与之相应的隶属函数如下：

$$\mu_{A_1}(x)=\sup_{y\in X_i}\mu_A(y)\qquad 当x\in X_i$$

而

$$\mu_{A_2}(x)=\inf_{y\in X_i}\mu_A(y)\qquad 当x\in X_i$$

它们将相应地称为A的上不分明集和下不分明集。

定理4.3 设P是从fts$(X,\mathscr{T})$到它的商fts$(X/R,\mathscr{U})$上的射影。则下面的说法是等价的。

(i)P是F—开的。

(ii)若A是$(X,\mathscr{T})$中一开不分明集，则它的上不分明集A_1是开的。

(iii)若A是$(X,\mathscr{T})$中一闭不分明集，则它的下不分明集A_2是闭的。

如果"开"和"闭"在(i)、(ii)和(iii)中交换，则所具之说法是等价的。

证： 仅需指出$A_1=P^{-1}\left[P(A)\right]$和$A_2=\left[P^{-1}(P(A'))\right]'$，

结果即得。

定理4.4 若$(X,\mathscr{T})$是C_{11}空间且P是F—开的，则商fts$(X/R,\mathscr{U})$是C_{11}空间。

证： 设$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一可数基。当$B\in\mathscr{B}$，$P[B]\in\mathscr{U}$，因为P是F—开的，族$\{P[B]\}$，$B\in\mathscr{B}$构成$\mathscr{U}$的一可数基。为此，设$V\in\mathscr{U}$则$P^{-1}[V]\in\mathscr{T}$，并因此是$\mathscr{B}$的元素的并，如记作$P^{-1}[V]=\bigcup_{i\in I}B_i$。则有

$$V=P\left[P^{-1}[V]\right]=P\left\{\bigcup_{i\in I}B_i\right\}=\bigcup_{i\in I}P[B_i]。$$

定理4.5 如果$(X,\mathscr{T})$是紧空间（可列紧空间）则商tts$(X/R,\mathscr{U})$是紧空间（可列紧空间）。

证： 只要指出P是F—连续的上映射，且一个紧的（可列紧的）fts的F—连续的象是紧（可列紧）空间。（见[3]）。

（下接99页）

不分明点和不分明拓扑的局部性质

C. K. Wong*)

1．引言

$Zadeh$在文〔1〕中引入了不分明集的基本概念，它构成了不分明数学的支柱。他在〔2〕中还引入了另外的非常有用的概念，即不分明单子。

不分明拓扑的基本概念和一般性质在以前的论文〔3—5〕中，已做过系统的阐述和研究。然而由于缺乏点的正规的不分明化，于是不能在不分明拓扑中去研究收敛性或局部性质。幸而$Zadeh$引入的不分明单子将成为解决这一问题的关键。基于这一概念，本文引入了不分明点的概念，并得到了与局部可列性，分离性和局部紧性有关的结果。可以观察到与一般拓扑理论有许多细微的，有时是惊人的脱离。因而，许多表面上简单的结果需要更详尽地证明。

不分明点的引入还导出极有意义的关于收敛性的研究。因而，在本文中我们将仅限制于去得到有关于C_1和离散空间的结果。而不把有关$Moore$—$Smith$收敛的研究包含进去。

为了保持完整性，预备知识一节仍被保留。

2．预备

设$X=\{x\}$是一个点空间。X中的不分明集A，是被X到单位区间〔0,1〕的隶属函数$\mu_A(x)$所界定的。

定义 2.1 设A和B是X中的不分明集。则

$A=B \Longleftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x)$　　　　对每一$x\in X$

$A\subset B \Longleftrightarrow \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$　　　　对每一$x\in X$

$C=A\cup B \Longleftrightarrow \mu_C(x)=max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$　　　　对每一$x\in X$

$D=A\cap B \Longleftrightarrow \mu_D(x)=min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$　　　　对每一$x\in X$

$E=A' \Longleftrightarrow \mu_E(x)=1-\mu_A(x)$　　　　对每一$x\in X$。

更一般地，对于不分明集族$\mathscr{A}=\{A_i|i\in I\}$，其并$C=\bigcup_I A_i$和交$D=\bigcap_I A_i$，定义作

$$\mu_C(x)=\mathop{Sup}_I\left\{\mu_{A_i}(x)\right\},\qquad x\in X,$$

$$\mu_D(x)=\mathop{inf}_I\left\{\mu_{A_i}(x)\right\},\qquad x\in X。$$

符号Φ用来表示空的不分明集($\mu_\phi(x)=0$，对每一$x\in X$)。至于X，我们有定义$\mu_X(x)=1$，对每一$x\in X$。

定义 2.2 不分明拓扑是X中满足下列条件的不分明集族$\mathscr{T}$：

(a)Φ，$X\in\mathscr{T}$。

(b)若A，$B\in\mathscr{T}$，则$A\cap B\in\mathscr{T}$。

(c)若对每一个$i\in I$都有$A_i\in\mathscr{T}$，则$\bigcup_I A_i\in\mathscr{T}$。$\mathscr{T}$称为X的不分明拓扑，偶对(X,$\mathscr{T}$)称为不分明拓扑空间，简记作fts。$\mathscr{T}$的每一个元素称作$\mathscr{T}$一开不分明集（或简称

开集）。一个不分明集是$\mathscr{T}$—闭的（或简称闭集），当且仅当它的补集是$\mathscr{T}$—开的。

如同在一般拓扑中一样，粘不分明拓扑仅包含Φ和X，可是离散不分明拓扑包含所有的不分明集。

定义 2.3 设f是点空间X到Y的一个函数。设B是Y中的不分明集，且其隶属函数为$\mu_{B(x)}$。则B的原像记作$f^{-1}[B]$，它是X中的不分明集，其隶属函数定义为：

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x)=\mu_B(f(x)),\qquad \text{对每一}x\in X\text{。}$$

相反地，设A是X中的不分明集，它的隶属函数为$\mu_A(x)$，A的象记作$f[A]$，它是Y中的不分明集且隶属函数由下式给定，对每一$y\in Y$：

$$\mu_{f[A]}(y)=\sup_{Z\in f^{-1}[y]}\left\{\mu_A(Z)\right\},\qquad \text{如果}f^{-1}[y]\text{非空}$$
$$=0\qquad \text{其它情况}$$

其中$f^{-1}[y]=\{x|f(x)=y\}$。

定义 2.4 从fts$(X,\mathscr{T})$到fts$(y,\mathscr{U})$的函数f是F—连续的，当且仅当每一个$\mathscr{U}$—开不分明集的原像是$\mathscr{T}$—开不分明集。

定义 2.5 从fts$(X,\mathscr{T})$到fts$(Y,\mathscr{U})$的函数是F—开的，当且仅当它把$(X,\mathscr{T})$中的开不分明集上映射为$(Y,\mathscr{U})$中的开不分明集。

定义 2.6 设$\mathscr{T}$是一不分明拓扑。$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{B}$是相应于$\mathscr{T}$的基，当且仅当$\mathscr{T}$的每一个元素可以被表作$\mathscr{B}$中的某些元素的并。

定义 2.7 设$\mathscr{T}$是一不分明拓扑。$\mathscr{T}$的子族$\mathscr{S}$是相应于$\mathscr{T}$的次基，当且仅当$\mathscr{S}$的元素的有限交组成的集族，构成$\mathscr{T}$的一个基。

定义2.8 设$(X,\mathscr{T})$是fts。不分明集族$\mathscr{A}$是不分明集B的覆盖。当且仅当$B\subset\bigcup\{A|A\in\mathscr{A}\}$。其为开覆盖，当且仅当$\mathscr{A}$的每一个元素都是开不分明集。$\mathscr{A}$的子覆盖是$\mathscr{A}$的一个子族，其本身也是一个覆盖。

3．局部可列性和可分性

我们需要不分明点的概念。

定义 3.1 X中的不分明点p，是具有如下隶属函数的不分明集。

$$\mu_p(x)=y\qquad \text{当}x=x_0,$$
$$=0\qquad \text{其它部分。}$$

其中$0<y<1$。称p有承集X_0和值y。

定义 3.2设p是X中的不分明点，A为X中不分明集。则p称作在A中或A含有p，当且仅当对任意$x\in X$有$\mu_p(x)<\mu_A(x)$。记作$p\in A$。

定理 3.1 若$A=\bigcup_{i\in I}A_i$，其中I是任一指标集，则$p\in A$的充分必要条件是对于某些$i\in I$有$p\in A_i$。

证：($\Longleftarrow$)显然。

($\Longrightarrow$)设p的承集是x_0，则

$$\mu_A(x_0)=\sup_{i\in I}\mu_{A_i}(x_0)$$

有两种情况：(i)存在某些$i_0\in I$使得$\mu_{A_{i_0}}(x_0)=\mu_A(x_0)$，(ii)对所有的$i\in I$，$\mu_{A_i}(x_0)<$

$\mu_A(x_0)$。在情况(i) $P\in A_{i_0}$，在情况(ii) $P\in A$，意即 $\mu_P(x_0)<\mu_A(x_0)$，而因为 $\mu_A(x_0)=\sup_{i\in I}\mu_{A_i}(x_0)$，立即可得，对某些 i_0 有 $\mu_P(x_0)<\mu_{A_{i_0}}(x_0)$，于是 $P\in A_{i_0}$。

在通常的集合论中，定理 3.1 是不足道的。但是在不分明理论的情况下，可以想象它并不是那样微不足道的。事实上，如果用 $\mu_P(x)\leqslant\mu_A(x)$ 来代替定义 3.2 中的不等式，则定理 3.1 不一定真。另一方面，要是我们限制所有的不分明集取值0、1并希望定义3.1和3.2能还原为在通常集合论中相应的定义，我们就得用 $0<y\leqslant 1$ 和 $\mu_P(x)\leqslant\mu_A(x)$ 代替 $0<y<1$ 和 $\mu_P(x)<\mu_A(x)$。换句话说，我们现在的定义不能还原为通常的情况，甚至如果我们加强限制为：所有的不分明集仅取值0，1。因为定理 3.1 对我们今后研究中的一些方面是必要的，我们将坚持现在的定义。

定理 3.2设 $(X,\mathscr{T})$ 是fts。则 $\mathscr{T}$ 的子族 $\mathscr{B}$ 构成 $\mathscr{T}$ 的一个基的充分必要条件是对于 $\mathscr{T}$ 中的每一个元素 A 和对于每一个点 $P\in A$，存在 $\mathscr{B}$ 的一个元素 B 使得 $P\in B\subset A$。

证：($\Longrightarrow$)事实上，由 A 是 $\mathscr{B}$ 的元素的并，根据定理3.1则结果即得。

($\Longleftarrow$)设 X_1 是 X 的一个子集，而当 $x\in X_1$ 时，有 $\mu_A(x)>0$，而当 $x\in X-X_1$ 时 $\mu_A(x)=0$。设 $x_0\in X_1$，及 $y_0=\mu_A(x_0)>0$。因为 $y_0\leqslant 1$，则存在实数序列 $\{y_i\}$，$i=1,2,3\cdots$，使得 $0<y_i<y_0$，$i=1,2,\cdots$，且 $\lim_{i\to\infty}y_i=y_0$。由下式定义不分明点 P_i 的序列

$$\mu_{P_i}(x)=\begin{cases} y_i & \text{当}x=x_0, \\ 0 & \text{其它情况。}\end{cases}$$

则 $P_i\in A$。根据假设，存在 $\mathscr{B}$ 的一个元素 B，使得 $P_i\in B\subset A$。显然，在所有的指标 i 和所有的点 $x_0\in X_1$ 上的 B 的并恰好是 A。

定义 3.3 fts$(X,\mathscr{T})$称为 C_{II} 空间，当且仅当存在一个 $\mathscr{T}$ 的可列基 $\mathscr{B}$。

定义 3.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 是fts，P 是不分明点。$\mathscr{T}$ 的子族 $\mathscr{B}_P$ 称为 P 的局部基，当且仅当对每一个 $\mathscr{B}_P$ 的元素 B 有 $P\in B$，且对 $\mathscr{T}$ 的每一元素 A 使得若 $P\in A$ 则存在 $\mathscr{B}_P$ 的一个元素 B 有 $P\in B\subset A$。

定义 3.5 fts$(X,\mathscr{T})$ 称作 C_I 空间，当且仅当对 X 中的每一个不分明点有一个可列的局部基。

定理 3.3 若 $(X,\mathscr{T})$ 是 C_{II} 空间，则它是 C_I 空间。

证：设 P 是 X 的一个不分明点。根据假设 $\mathscr{T}$ 有可列基 $\mathscr{B}$。设 $\mathscr{B}_P$ 是由 $\mathscr{B}_P=\{B|B\in\mathscr{B},P\in B\}$ 所确定的 $\mathscr{B}$ 的子族，则 $\mathscr{B}_P$ 是可列的。设 $A\in\mathscr{T}$，且使得 $P\in A$。根据定理3.2存在 $\mathscr{B}$ 的元素 B，使得 $P\in B\subset A$。由定义 B 是 $\mathscr{B}_P$ 的一个元素，于是知 $(X,\mathscr{T})$ 是 C_I 空间。

定义 3.6 fts$(X,\mathscr{T})$称作可分离空间，当且仅当存在不分明点的可列序列 $\{P_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使得对于 $\mathscr{T}$ 中的元素 A，而 $A\neq\Phi$，存在一点 P_i 使得 $P_i\in A$。

定理 3.4 若fts$(X,\mathscr{T})$是 C_{II} 空间，则它是可分离空间。

证：据假设，$\mathscr{T}$ 有可数基 $\mathscr{B}=\{B_i\}$，$i=1,2,\cdots$。当 $B_i\neq\Phi$ 则存在点 $x_i\in X$，使得 $\mu_{B_i}(x_i)>0$。确定不分明点 P_i 如下：

$$\mu_{P_i}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mu_{B_i}(x_i), & \text{当}x=x_i, \\ 0 & \text{其它处。}\end{cases}$$

显然 $P_i\in B_i$。则可数序列 $\{P_i\}$，$i=1,2,\cdots$，即是为说明 $(X,\mathscr{T})$ 是可分离的而需要的那一序列，因为 $\mathscr{T}$ 的每一个元素 A 将包含 $\mathscr{B}$ 的一个元素，即 $B_i\subset A$，因而 $P_i\in A$。

在[4]中已证明了 C_{II} 型fts也是 Lindelöf 空间。连同上述的结果正可以得知，在可数

性性质的四种类型：C_{II}，C_I，$Lindel\ddot{o}f$ 和可分离性之中，C_{II}是最强的。文〔4〕中还指出 $Lindol\ddot{o}f$ fts的F—连续的象还是$Lindel\ddot{o}f$空间。在此我们可以导出相似的结果。

定理 3.5 设f是从可分离的fts$(X,\mathscr{T})$到fts$(Y\ \mathscr{U})$上的F—连续函数。则$(Y、\mathscr{U})$也是可分的。

证： 设$\{P_i\}$，$i=1,2,\cdots$，是相应于$\mathscr{T}$中的每一个元素A的不分明点的可数序列。注意族$\{f〔P_i〕\}$，$i=1,2,\cdots$，构成Y中的不分明点序列。设B是$\mathscr{U}$的元素。因为存在不分明点P_i，使得$P_i\in f^{-1}〔B〕$，则$f^{-1}〔B〕$是$\mathscr{T}$的元素。由于f是到上的函数，因此知$f〔P_i〕\in B$。所以$(Y,\ \mathscr{U})$是可分的。

文〔5〕中证明了C_{II}型fts 在一个F—连续且F—开的映射下的象是C_{II}空间。这一点对于C_I空间也保持如此。

定理 3.6 设f是从C_I型fts$(X,\ T)$到fts$(Y,\ \mathscr{U})$上的F—连续函数。若f也是F—开的，则$(Y,\ \mathscr{U})$是C_I空间。

证： 设q是Y中的不分明点。则$f^{-1}〔q〕$是X中的一般不分明集，而不必要是不分明点。更准确地说，若q有承集y_0和值y，则$f^{-1}〔q〕$是具有下述隶属函数的不分明集：

$$\mu_{f-1〔q〕}(x)=y \qquad \text{对所有的 } x\in f^{-1}〔y_0〕,$$
$$=0 \qquad \text{其它情况。}$$

用下述的隶属函数确定一X的不分明点P

$$\mu_P(x)=y^{*)} \qquad \text{当} x=x_0,$$
$$=0 \qquad \text{其它情况。}$$

其中$x_0\in f^{-1}〔y_0〕$。

显然，$P\in f^{-1}〔q〕$和$f〔p〕=q$。根据假设P有可数的局部基，记作$\mathscr{B}_P$。我们将指出不分明集的可数族$\mathscr{V}_q=\{f〔A〕|A\in\mathscr{B}_P\}$构成$q$的局部基。首先，因为$f$是$F$—开的，对所有的$A\in\mathscr{B}_P$，$f〔A〕$是$\mathscr{U}$的一个元素。其次，设$B$是$\mathscr{U}$的元素，它使$q\in B$，则$f^{-1}〔B〕$是$\mathscr{T}$的元素，且$P\in f^{-1}〔B〕$。于是存在一个元素$A\in\mathscr{B}_P$，使得$P\in A\subset f^{-1}〔B〕$。因而$q\in f〔A〕\subset B$则即得所求证的结果。

4．收敛性、可列性和可分性

不分明点的引进，使我们能在一个有意义的方式上去讨论收敛性。

定义 4.1 设P_n，$n=1,2,\cdots$，是fts$(X,\mathscr{T})$中不分明点的序列，它们分别有承集x_n，$n=1,2,\cdots$，设P是一个不分明点，它的承集$x\neq x_n$，对某一个数n_0，当$n\geqslant n_0$时P_n称为收敛到P，当且仅当对T的每一个使$P\in A$的元素A，存在数m，使得当$n\geqslant m$时有$P_n\in A$。此时记作$P_n\to P$。

注意，为了得出有意义的定义，在承集上的限制是必要的。还请注意，若P_n有值Y_n，P有值y，在通常意义下$P_n\to P$却不意味着能有$y_n\to y$。事实上，我们可做下述观察。若$P_n\to P$，且P有承集x_0和值y，则对所有有承集x_0和值$z\geqslant y$的不分明点q，则$P_n\to q$。在一般拓扑理论中，有与此相似的情况。事实上，网收敛的极限的唯一性是一类特殊类型的拓扑空间，即称作$Hausdorff$空间的特征。

定义 4.2 设P是$(X,\ \mathscr{T})$中的不分明点，其承集为x_0。设A是X中的不分明集，则P是

*）应为“$\mu_P(x)<y$，当$x=x_0$”此为原文印刷错误——译者注

A的聚点，当且仅当对$\mathscr{T}$的每一个元素B，有$P\in B$，$B\cap A_P\neq\Phi$，其中 A_P 是具如下隶属函数的不分明集。

$$\mu_{A_P}(x)=0 \qquad \text{当} x=x_0 \text{时},$$
$$=\mu_A(x) \qquad \text{其它情况。}$$

类似于我们对收敛所做的各种注释，我们可得知，若P是A的聚点，且它有承集x_0和值y，则所有的有承集x_0和值$z\geqslant y$的不分明点q都是A的聚点。

引理 4.1 设$(X,\mathscr{T})$是fts。设A是X中的不分明集，P是X中的不分明点。若存在不分明点的序列 Pn，$n=1,2,\cdots$，使得$Pn\in A$，且$Pn\to P$，则P是A的聚点。

证： 设B是$\mathscr{T}$的元素，而$P\in B$。根据收敛性，存在m使当$n\geqslant m$，$P_n\in B$。另一方面，$P_n\in A$，且当$n\geqslant n_0$时，P_n的承集不同于P的承集，因而当 $n\geqslant n_0$ 时，$P_n\in A_P$。即可得当$n\geqslant max(n_0, m)$时，$P_n\in B\cap A_P$，意即$B\subset A_P\neq\Phi$。

引理 4.2 若$(X,\mathscr{T})$是C_1空间，则相应于X中的每一个不分明点P，存在 P 的可列的局部基$\mathscr{V}=\{V_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使得$V_1\supset V_2\supset V_3\supset\cdots$。

证： 根据假设，存在P的可列局部基$\mathscr{B}=\{B_i\}$，$i=1,2,\cdots$确定

$$V_1=B_1,\quad V_2=B_1\cap B_2,\ \cdots,\quad V_n=\bigcap_{i=1}^{n}B_i,\ \cdots$$

显然$V_1\supset V_2\supset V_3\supset\cdots$。现证它们构成局部基，设$A$是$\mathscr{T}$的元素，其使 $P\in A$。存在$\mathscr{B}$的元素，如B_{i_0}使得$P\in B_{i_0}\subset A$，根据局部基的定义，$P\in B_i$，$i=1,2,\cdots,i_0$，于是

$$P\in\bigcap_{i=1}^{i_0}B_i=V_{i_0}\subset B_{i_0}\subset A$$

因而$\{V_i\}$，$i=1,2,\cdots$，构成P的局部基。

现在我们可以证明下述定理。

定理 4.1 设$(X,\mathscr{T})$是C_1型fts，设A是X中的不分明集，P是X中不分明点。则P是A的聚点的充要条件是存在不分明点的序列P_n，$n=1,2,\cdots$，使得$P_n\in A$，且$P_n\to P$。

证：（$\Leftarrow$）由引理 4.1 即得。

（$\Rightarrow$）根据引理4.2，存在P的局部基$\{V_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使得$V_1\supset V_2\supset V_3\supset\cdots$。由$P$是$A$的聚点即可知对所有的$i$有$V_i\cap A_P\neq\Phi$。设$x_i$是$X$中使$\mu_{V_i\cap A_P}(x_i)>0$的点。由下述隶属函数确定不分明点$P_i$：

$$\mu_{P_i}(x)=\tfrac{1}{2}\mu_{V_i\cap A_P}(x_i), \qquad \text{当} x=x_i,$$
$$=0, \qquad \text{其它情况。}$$

则$P_i\in V_i\cap A_P$，且对所有的i，P_i有与P不同的承集，因而$P_i\to P$。设$B\in\mathscr{T}$，它使$P\in B$，则存在V_m使得$P\in V_m\subset B$。但当$i\geqslant m$时$V_m\supset V_i$，因而当$i\geqslant m$时$P_i\in V m\subset B$。即为所证。

定理 4.2 设$(X,\mathscr{T})$是fts。若存在X中的不分明点的可数序列$\{P_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使得X中的每一个不分明点P是不分明集$A=\bigcup_i P_i$的聚点，则$(X,\mathscr{T})$是可分的。

证： 显然。

然而上述定理的逆一般是不真的，这再次说明了与一般拓扑的又一偏差。我们有下列反例。

定理 4.3 存在可分的fts$(X,\mathscr{T})$和X中的不分明点P，使得对X中的任意不分明点的可数序列$\{P_i\}$，$i=1,2,\cdots$，P不是$A=\bigcup_i P_i$的聚点。

证：设X是点空间，$x_0 \in X$，A_α，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$是$X$中如下定义的不分明集

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \alpha \text{，} \qquad \text{当} x = x_0\text{，}$$
$$= 0 \text{。} \qquad \text{其它情况。}$$

设$\mathscr{T} = \{\Phi, X, A_\alpha, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$。则$(X, \mathscr{T})$是fts。考察不分明点的可数序列$\{P_\beta\}$，且其每一个$P_\beta$的承集是$x_0$，而$\beta$在0和1之间的有理数值中取值。$\mathscr{T}$中的任一个元素$B \neq \Phi$，都含有$\{P_\beta\}$的一个元素。则$(X, \mathscr{T})$是可分的。设$P$是不分明点，其承集为$x_0$值为$\alpha_0$，$0 < \alpha_0 < 1$。则$P$不是任何的可列不分明点的并$A$的聚点，因为对所有含有$P$的$B \neq X$，有$B \cap A_P = \Phi$。

5．局部紧性

紧性的局部化当然是局部紧性，其构成本节的主要内容。

定义 5.1 fts是紧的，当且仅当空间的每一开覆盖有有限子覆盖。

定义 5.2 fts$(X, \mathscr{T})$称作局部紧的，当且仅当对于X中每一个不分明点P，存在元素$A \in \mathscr{T}$使得(i)$P \in A$，(ii)A是紧的，即A的每一开覆盖有有限子覆盖。

显然，每一个紧的fts是局部紧的。

以下的结果再次地证明了不分明拓扑与一般拓扑的偏差。

定理 5.1 离散的fts$(X, \mathscr{T})$不是局部紧的。

证：设P是X中的不分明点，其承集为x_0，值为y，$0 < y < 1$。设A是任意一个有$P \in A$的开不分明集，$\mu_A(x)$表它的隶属函数。考察所有的使$\mu_{A_i}(x) < \mu_A(x)$，当$x \in X$，的不分明集$\{A_i\}$，$i \in I$，的集族$\mathscr{A}$。显然$\mathscr{A}$构成A的一个覆盖。因为$(X, \mathscr{T})$是离散的，则它的任何一个不分明集都是开集。因而$\mathscr{A}$是A的开覆盖。然而$\mathscr{A}$无有限子覆盖。于是知$(X, \mathscr{T})$不是局部紧的。

同样C_1 fts，我们有下述定理。

定理 5.2 设f是从局部紧fts$(X, \mathscr{T})$到fts$(Y, \mathscr{U})$上的F一连续的函数。若f还是F一开的，则$(Y, \mathscr{U})$是局部紧的。

证：设q是y中的不分明点，其承集为y_0，值为y。如下确定X中的不分明点P：

$$\mu_P(x) = y, \qquad \text{当} x = x_0\text{，}$$
$$= 0 \text{。} \qquad \text{其它情况。}$$

其中$x_0 \in f^{-1}[y_0]$，则$f[P] = q$。根据假设，存在元素$A \in \mathscr{T}$，它使得$P \in A$，且A是紧的。现取$q \in f[A]$，则$f[A]$是$\mathscr{U}$的元素，因为f是F一开的。因为f是F一连续的，因而$f[A]$是紧的。即$(Y, \mathscr{U})$是局部紧空间。

6．积和商空间

在本节我们将讨论以前定义过的由空间生成的积和商空间。我们特别感兴趣的是有关局部可列性，可分性和局部紧性的条件的生成和区分。

设$\{X_\alpha\}$，$i \in I$是空间的集族。设$X = \Pi_{\alpha \in I} X_\alpha$是通常意义下的积空间，$P_\alpha$是从$X$到$X_\alpha$的射影。

更进一步假设每一个X_α是fts，其相应不分明拓扑为$\mathscr{T}_\alpha$。设$B\in\mathscr{T}_\alpha$则根据定义2.3P_α^{-1}〔B〕是X中的不分明集。则不分明集族$\varphi=\{P_\alpha^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{T}_\alpha,\alpha\in I\}$在下述意义下即生成$X$的拓扑$\mathscr{T}$：设$\mathscr{B}$是$\varphi$的元素的有限交的全体为元之集族，$\mathscr{T}$是所有$\mathscr{B}$的元素的并为元之集族。则显然$\mathscr{T}$确实是$X$的不分明拓扑，且其以$\mathscr{B}$为基，以$\varphi$为次基。

定义 6.1 给定fts的集族$\{(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)\},\alpha\in I$，不分明集拓扑$\mathscr{T}$按如上定义，则称作$X=\Pi_{\alpha\in I}X_\alpha$的积不分明拓扑，而（$X$，$\mathscr{T}$）称作积fts。

定理 6.1 设$\{(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha\in I$是$C_1$ fts的可列集族，则积fts$(X,\ \mathscr{T})$是C_1型、

证、设P是X的不分明点。则它的投影$P_\alpha=P_\alpha[P]$又是X_α中的不分明点。根据假设P_α有可列的局部基$\mathscr{B}_\alpha=\{B_{\alpha,i}\}$ $i=1,2,\cdots$。对每一个α，设$\mathscr{V}_\alpha$是X中的由式$\mathscr{V}_\alpha=\{P_\alpha^{-1}[B_{\alpha,i}]\mid B_\alpha,\ i\in B_\alpha\}$所定义的开不分明集族。设$K$是$I$的任一有限子集，$\mathscr{U}_K$是$X$中如下定义的开不分明集族：

$$\mathscr{U}_K=\{\bigcap_{\alpha\in K}V_\alpha\mid V_\alpha\in\mathscr{V}_\alpha\}$$

进而设$\mathscr{B}_P$是所有$\mathscr{U}_K$的集族，其中K于I的所有有限子集上取值。注意$\mathscr{B}_P$是X中的开不分明集的可列族。因为一个可列集的所有有限子集是可列的，$\mathscr{B}_P$的所有元素都含有P。以下我们将证明$\mathscr{B}_P$是P的局部基。为此，设A是$\mathscr{T}$的使$P\in A$的元素，则根据积不分明拓扑$\mathscr{T}$的定义及根据定理3.2存在$\mathscr{T}$的有如下形式的基的元：

$$B=\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}[A_j]$$

其中$A_j\in\mathscr{T}_{\alpha_j}$，使得$P\in B\subset A$。因为$P_{\alpha_j}\in A_j$即可知存在$\mathscr{B}_{\alpha_j}$的一个元素$B_{\alpha_j},i_j$，其使$P_{\alpha_j}\in B_{,i_j}$，$i_j\subset A_j$；对$j=1,2,\cdots$，$n$依此而作，则$P\in B_P\subset B$，其中

$$B_P=\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}[B_{\alpha_j},\ i_j]$$

是$\mathscr{B}_P$的元素。即得积fts$(X,\ T)$是C_1型。

以下我们将证明存在不可列的C_1空间集族，其积空间不是C_1空间。

定理 6.2 设$\{(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha\in I$是不可列的$C_1$空间集族。于是若

(i)任何一个都不是，非离散的，即对每一个$\alpha\in I$，存在$U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha$而$U_\alpha\neq\Phi$或$X_\alpha$；

(ii)对每一个$\alpha\in I$，存在不分明点$p_\alpha\in U_\alpha$，使得

$$P=\bigcap_{\alpha\in I}P_\alpha^{-1}[p_\alpha]$$

是X中的不分明点；

(iii)在每一个fts$(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$中，对任意的$A\in\mathscr{T}_\alpha$而$A\neq\Phi$，存在点$x\in X_\alpha$使得$\mu_A(x)=1$，其中$\mu_A$是$A$的隶属函数。

则积fts$(X,\ \mathscr{T})$不是C_1空间。

附注、不同于一般拓扑，给定X_α中的不分明点p_α，$\alpha\in I$，

$$P=\bigcap_{\alpha\in I}P_\alpha^{-1}[p_\alpha]$$

不总是X中的不分明点，而它可能是一个不分明点，也可能是空不分明集Φ。例如，设$I=(0,1)$。在每一个X_α中设p_α是一个不分明点，其承集为x_α，值为α，则

$$P=\bigcap_{\alpha\in I}P_\alpha^{-1}[p_\alpha]=\Phi$$

证：设$(X,\ \mathscr{T})$是C_1空间，则P有可列的局部基$\mathscr{B}_P=\{B_i\}$*)，$i=1,2,\cdots$。根据积不分明拓扑的定义，对每一个$B_i\in\mathscr{B}_P$存在$\mathscr{T}$的基的元

$$B_0=\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}[A_{\alpha_j}],\quad A_{\alpha_j}\in\mathscr{T}_{\alpha_j},$$

使得$P\in B_0\subset B_i$。根据假设(iii)，当$\alpha\neq\alpha_j$时$P_\alpha[B_0]=X_\alpha$，$j=1,2,\cdots,n$。确实如此，设$x_j\in X_{\alpha_j}$，使得$\mu_{A_{\alpha_j}}(x_j)=1$，$j=1,2,\cdots,n$。设$x_\alpha\in X_\alpha$，考察$X$的子集

$$S'=\{x_1\}\times\cdots\times\{x_n\}\times\{x_\alpha\}\times\prod_{\substack{\beta\neq\alpha_j,\alpha\\ j=1,2,\cdots,n,}}X_\beta$$

则$\mu_{B_0}(S)=1$，对每一$s\in S$时。因而$\mu_{P_\alpha[B_0]}(x_\alpha)=1$。因为$x_\alpha$是任意选择的，即知$P_\alpha[B_0]=X_\alpha$。因而$P_\alpha[B_i]=X_\alpha$，当$\alpha\neq\alpha_j$，$j=1,2,\cdots$，$n$时。对所有的$i$依此类推，我们得到$I$的可列子集$K$，它使得对每一个$\alpha\in I-K$和所有的$i$有$P_\alpha[B_i]=X_\alpha$。因为$I$是不可列的，故存在$\alpha_0\in I-K$。因此对所有的$i$，$P_{\alpha_0}[B_i]=X_{\alpha_0}$。另一方面$P\in P_{\alpha_0}^{-1}[U_{\alpha_0}]$。根据局部基的定义，存在$B_i\in\mathscr{B}_P$使得$P\in B_i\subset P_{\alpha_0}^{-1}[U_{\alpha_0}]$。因而$P_{\alpha_0}[B_i]\subset U_{\alpha_0}$，出现矛盾。

定理 6·3 设$\{(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha\in I$是可分空间的可列集族，则积fts$(X,\ \mathscr{T})$也是可分的。

证：在X_α中，存在不分明点的可数序列$\{P_{\alpha_i}\}$，$i=1,2,\cdots$，使得对$\mathscr{T}_\alpha$的每个元素$A_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha$有不分明点$P_{\alpha_i}\in A_\alpha$。设$\mathscr{U}_K$是$X$中由$\mathscr{U}_\alpha=\{P_\alpha^{-1}[p_{\alpha_i}]\}$，$i=1,2,\cdots$，所定义的开不分明集族。设$K$是$I$的有限子集，$\mathscr{V}_K$是$X$中如下定义的开不分明集族。

$$\mathscr{V}_K=\{\bigcap_{\alpha\in K}V_\alpha|V_\alpha\in\mathscr{U}_\alpha\}。$$

最后设$\mathscr{V}$是所有的$\mathscr{V}_K$为元之集族，其中K取值于I的所有可能的有限子集。$\mathscr{V}$是X中可列的开不分明集族。$\mathscr{V}$的每一个元素形如$\bigcap_{\alpha\in K}V_\alpha$，因为$K$是有限的，总存在不分明点，例如说是$p_\beta\in\bigcap_{\alpha\in K}V_\alpha$。对$\mathscr{V}$的所有元素依此类推，则$\mathscr{P}=\{p_\beta\}$是$X$中不分明点的可列族。进而对$\mathscr{P}$的每个元素$A$，存在开不分明集

$$B=\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}[A_j],$$

其中$A_j\in\mathscr{T}_\alpha$，其使得$B\subset A$。据其构造，存在$\mathscr{P}$的不分明点p_β使得

$$p_\beta\in\bigcap_{j=1}^{n}P_{\alpha_j}^{-1}[P_{\alpha_j}]\subset B\subset A$$

因而$(X,\ \mathscr{T})$是可分空间。

定理 6.4 设$\{(X_\alpha,\ \mathscr{T}_\alpha)\}$，$\alpha=1,2,\cdots,n$是局部紧fts的有限集族，则积fts$(X,\ T)$也是局部紧的。

证：设P是X中的不分明点，$p_\alpha=P_\alpha(p)$。根据假设，存在$\mathscr{T}_\alpha$的元素A_α，使得$P_\alpha\in A_\alpha$，且A_α是紧的。则不分明集$B=\bigcap_{\alpha=1}^{n}P_\alpha^{-1}(A_\alpha)$是$\mathscr{T}$的元素，且$p=\bigcap_{\alpha=1}^{n}P_\alpha^{-1}[p_\alpha]$是属于它的。我们只需要证明$B$是紧的。如在[5]中一样，如下定义两个不分明集$A_1$，$A_2$的积$A_1\times A_2$

$$\mu_{A_1\times A_2}(x_1,x_2)=\min(\mu_{A_1}(x_1),\ \mu_{A_2}(x_2)).$$

进而可定义$B=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$。用[5]中定理 3.4 的证明中所用过的某些论证，恰可

*）原文误印为$B_P=\{B_i\}$——译者注

以证明B是紧的。因而（X，$\mathscr{T}$）是局部紧的。

以下我们将讨论商不分明拓扑。

定义 6.2 设X是一个点空间，设R是定义于X上的一个等价关系。X/R是通常意义下的商集，并设P是从X到X/R的通常意义下的射影。

若(X，$\mathscr{T}$）*) 是 fts，可以如下定义X/R中的不分明拓扑，使得P是F—连续的，设$\mathscr{U}$是由$\mathscr{U}=\{B|P^{-1}[B]\in\mathscr{T}\}$**) 所定义的$X/R$中的不分明集族。则$\mathscr{U}$是不分明拓扑，且称作是$X/R$的商拓扑，而（$X/R$，$\mathscr{U}$）称作商 fts。我们可得下述结果。

定理 6.5,(i)若（X，$\mathscr{T}$）是可分的，则商 fts（X/R，$\mathscr{U}$）是可分的。

（ii）若（X，$\mathscr{T}$）是C_1空间，P是F—开的，则商fts（X/R，$\mathscr{U}$）是局部紧的。

证：（i）由定理 3.5 即得。（ii）由定理 3.6 即得。（iii）由定理 5.2 即得。

*）原文误印为（x,$\mathscr{T}$）——译者注

**）原文误印为$\mathscr{U}=\{B|P^{-1}[B],\in T\}$——译者注

参 考 文 献

1．L.A.Zadeh.Fuzzy sets. Infor mation and Control 8（1965）,338—353.

2．L. A. Zadeh. AFuzzy—Set—Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges. ERL Memorandum M335, University of California,Berkeley,April 1972.（T$_0$ appear in Information Sciences）.

3．C. L. Chang. Fyzzy. topological spaces. J. Math. Anal. Appl. 24(1968). 191—201、

4．C. K. Wong. Covering properties of Fuzzy topology. spaces. J. Math. Anal. Appl. 43(1973). 697—703.

5．C. K. Wong. Fuzzy. topology: Product and quotient theorems.J. Math. Anal. Appl. 45（1974）, 512—521.

6．J. L. Kelley. "General. Topology". Van Nostrand. Princeton. NJ. 1955.

（本文译自J、Math. Anal. AppL46（1974）316—328）

（刘畅畅、李崇靖译）

不分明拓扑

R. Lowen

本文研究不分明拓扑的某些性质，特别是不分明紧性和不分明连续性。

1．定义和记号

设E是一个集，$\mathscr{T}(E)$记E上的所有拓扑的族，$\mathscr{W}(F)$记E上的所有不分明拓扑的族〔(3)，(6)〕。又设$I=[0,1]\subset R$，並确定上R的一个拓扑

$$\mathscr{T}_r=\{]\alpha,\infty[:\alpha\in R\}\cup\{\varphi\}.$$

拓扑空间$(I,\mathscr{T}r/I)$记为I_r。

考虑下面的映射：

$$\omega: \mathscr{T}(E)\to\mathscr{W}(E),$$
$$\mathscr{T}\mapsto\omega(\mathscr{T})=\mathscr{C}((E,\mathscr{T}),I_r);$$
$$i: \mathscr{W}(E)\to\mathscr{T}(E),$$
$$\delta\mapsto i(\delta);$$

这里$i(\delta)$是对应于E到Ir的《函数》δ的族的初始拓扑。

对于某个确定的拓扑$\mathscr{T}$，当$\delta=\omega(\mathscr{T})$时，我们称$\delta$是由$\mathscr{T}$生成的。

容易证明

(1) $iow=\mathrm{id}_{\mathscr{T}(E)}$，

(2) i 和 w 分别是在上的和1－1的。

(3) $iow(\delta)$是一切比δ精的拓扑生成的不分明拓扑中最小的。

(4) δ是拓扑生成的充要条件为$\delta=iow(\delta)$。

还有一个更重要的事实，δ是拓扑生成的充分必要条件是对任何映射$f\in\mathscr{C}(I_r,I_r)$和$u\in\delta$有$fou\in\delta$。

2．不分明紧性

设(E,δ)是一个不分明拓扑空间。我们说(E,δ)是不分明紧的，如果对任何族$(\mu_j)_{j\in J}\subset\delta$，$\sup\limits_{j\in J}\mu_j=1$和一切$\varepsilon>0$都存在$J_0\in Z^{(J)}$使得$\sup\limits_{j\in J_0}\mu_j\geqslant1-\varepsilon$。

可以证明，对任何$\mathscr{T}\in\mathscr{T}(E)$，不分明拓扑空间$(E,\omega(\mathscr{T}))$是不分明紧的充分必要条件是拓扑空间$(E,\mathscr{T})$是紧的。

设$\sigma\subset\delta$是不分明拓扑δ的一个子族，若$\forall\mu\in\delta$都存在族$(\mu_j)_{j\in J}\subset\sigma$，使得$\sup\limits_{j\in J}\mu_j=\mu$，

则称σ为不分明拓扑δ的一个基。

设$\sigma'\subset\delta$，且σ'的一切有限交构成δ的一个基，则称σ'为不分明拓扑δ的一个子基。

可以证明不分明的$d'Alexander$引理。

3．初始的和最终的不分明拓扑

设E是一个集，$(F_j,\ \gamma_j)_{j\in J}$是一族不分明拓扑空间，$f_j$，$j\in J$是从$E_j$到集$F$的函数。容易看出，

$$\bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j),$$

是关于E的使得一切映射f_j都不分明连续的最小不分明拓扑的子基，其中$f_j^{-1}(r_j)=\{f_j^{-1}(\lambda):\ \lambda\in\gamma_j\}$。

我们记这个不分明拓扑为$\sup\limits_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j)$。且称它为关于$E$的族$(F_j,\ f_j)_{j\in J}$的初始拓扑。

设$(F_j,\ \mathscr{T}_j)_{j\in J}$是拓扑空间，则

$$\omega(\sup_{j\in J} f_j^{-1}(\mathscr{T}_j))=\sup_{j\in J} f_j^{-1}(\omega(\mathscr{T}_j)),$$

又若$(F_j,\ \gamma_j)$是不分明拓扑空间，则

$$i(\sup_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j))=\sup_{j\in J} f_j^{-1}(i(\gamma_j)).$$

我们定义不分明拓扑空间族$(E_j,\ \delta_j)_{j\in J}$的乘积为$(\prod\limits_{j\in J} E_j,\ \sup P{r}_j^{-1}(\delta_j))$。可以证明有限个不分明紧空间的乘积是不分明紧的。对于无穷乘积这个性质将不保持。

类似地，我们可以引入所谓最终的不分明拓扑，设$(E_j,\ \delta_j)_{j\in J}$是一个不分明拓扑空间族，$f_j$，$j\in J$是由$E_j$到$F$的函数，我们用$\bigcap\limits_{j\in J} f_j(\delta_j)$表示对应的关于$F$的最终的不分明拓扑。

与初始的不分明拓扑类似，有下面的关系：

$$\omega(\bigcap_{j\in J} f_j(\mathscr{T}_j))=\bigcap_{j\in J} f_j(\omega(\mathscr{T}_j)).$$

$$i(\bigcap_{j\in J} f_j(\delta_j))\subset\bigcap_{j\in J} f_j(i(\delta_j)).$$

后一个关系一般是严格的。

4．不分明一致空间

设E是一个集，$\upsilon\in I^E$和$\mu\in I^{E\times E}$。

定义μ关于u的截割为

$$\mu\langle\upsilon\rangle(x)=\sup_{y\in E}\upsilon(y)\wedge\mu(y,x).$$

对于μ，$V\in I^{E\times E}$，定义μ和V的结合：

$$\mu\triangle\upsilon(x,y)=\sup_{z\in E}\upsilon(x,z)\wedge\mu(z,y).$$

关于E的一个不分明一致结构是一个子集$\varphi\subset I^{E\times E}$，满足

(1) $\mu, v\in\varphi \Longrightarrow \mu\wedge v\in\varphi$.

(2) $\mu\geqq v\in\varphi \Longrightarrow \mu\in\varphi$.

(3) $\forall\mu\in\varphi$, $\forall x\in E$, $\mu(x,x)=1$,

(4) $\forall\mu\in\varphi$, $\tilde{\mu}\in\varphi$, 这里$\tilde{\mu}(x,y)=\mu(y,x)$,

(5) $\forall\mu\in\varphi$, 存在$v\in\varphi$使得$v\triangle v\leqq\mu$.

容易看出，映射

$$\psi: I^E\to I^E,$$

$$\mu\to\psi(\mu)=\inf_{v\in\varphi} v\langle\mu\rangle$$

是格I^E中的闭包算子。

可以证明，不分明集族

$$t(\varphi)=\{\mu\in I^E:\ \psi(1-\mu)=1-\mu\}$$

是关于E的一个不分明拓扑。

设(E,φ)和(F,ψ)是不分明一致空间，$f: E\to F$是一个映射，称f是不分明一致连续的，当且仅当$\forall v\in\psi$，存在$\mu\in\varphi$，使得

$$v(f(x),f(y))\geqq\mu(x,y),\ \forall(x,y)\in E\times E.$$

设${}_2f: E\times E\to F\times F:\ (x,y)\mapsto(f(x),f(y))$,

则上述条件归结为$\forall v\in\psi$存在$\mu\in\varphi$使得$v\geqq{}_2f(\mu)$.

显然，不分明一致连续的函数是不分明连续的。

对于一个一致空间$(E,\mathscr{U})$都有一个不分明一致空间$(E,\omega_U(\mathscr{U}))$与之对应，这里$\omega_U(\mathscr{U})=\{\mu\in I^{E\times E}:$ 存在$V\in\mathscr{U}$使得$\mu\geqq\chi_V\}$而对于一个不分明一致空间(E,φ)也都有一个一致空间$(E,i_U(\varphi))$与之对应，其中

$$i_U(\varphi)=\{\alpha^{-1}(1):\ \alpha\in\varphi\}.$$

可以证明，若$\mathscr{T}(\mathscr{U})$是结合于一致结构$\mathscr{U}$的拓扑，则

$$t(\omega_U(\mathscr{U}))=\omega(\mathscr{T}(\mathscr{U}))$$

和

$$\mathscr{T}(i\mu(\varphi))\supset i(t(\varphi)),$$

可以类似于初始的不分明拓扑定义初始不分明一致结构。设$(E_j,\varphi_j)_{j\in J}$是一族不分明一致结构，$f_j, j\in J$是由E_j到F的函数，则其对应的初始不分明一致结构为

$$\sup_{j\in J} {}_2f_j^{-1}(\varphi_j).$$

籍助于适当的假设，可以证明

$$t(\sup_{j\in J} {}_2f_j^{-1}(\varphi_j))=\sup_{j\in J} f_j^{-1}(t(\varphi_j)),$$

$$\sup {}_2f_j^{-1}(\omega_*(\mathscr{U}_j))=\omega_*(\sup_{j\in J} {}_2f_j^{-1}(\mathscr{U}_j)),$$

和

$$\sup_2 f_j^{-1}(i_*(\varphi_j)) = i_*(\sup_{j\in I} {}_2 f_j^{-1}(\varphi_j)).$$

参考文献

(1) G. Bilkhoff, Lattice theory (A. M. S. Colloqium publications, XXV 1967).

(2) N. Bourbaki, Topologie ge'ne'rale, chap. 1 et2, Hermann, Paris, 1965.

(3) C. K. Chang, Fuzzy topological spaces(Journal of Mathematical Analysis ancl Applications, 24, 1968).

(4) A. De Lucaet Termini, Algebraic properties of fuzzy sets (Journal of mathematical Analysis and Applications, 40, 1972).

(5) R. Lowen, Comptes rendus, 278, se'rie A, 1974 (àparaitre)

(6) L. A. Zaeleh, Fuzzy sets (Information and Control, 8, 1965).

(译自C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 1974)

(胡诚明译)

不分明拓扑空间的一致性

BRUCE HUTTON

本篇论文中我们将拓扑空间上的拟一致性的概念扩充到不分明拓扑空间。我们证明很多与普通定理相对应的定理。具体地说，我们要证明每个不分明拓扑空间是拟一致的，并且利用完全正则的类型来描述一致性。我们还在不分明单位区间上构造自然一致性。

1. 引 言

在〔3〕里我们把正规性推广到了在〔1〕中引进的不分明拓扑空间，并且用某种Urysohn引理描述它。在这个过程中，我们构造一个有意义的不分明拓扑空间，即不分明单位区间。

本文中我们将拓扑空间拟一致性和一致性的概念推广到不分明拓扑空间上。我们证明很多与普通定理相对应的定理。具体地说，我们要证明每一个不分明拓扑空间是拟一致的。利用完全正则的类型来描述一致性，不分明单位区间起着极重要的作用。为完成这个目的，我们在不分明单位区间上构造一个自然一致性。

作者要感谢 Ralph Fox 与 Ivan Reilly 对若干问题有益的建议。

2．预备知识

本文中提到的（L，≤，′）我们始终认为是有反序对合“′”的一个完全分配格。集X上的一个L—不分明集是任一个映射A：X→L。这里说明L是一个真实值的集合，A（x）称为在不分明集A中x 的隶属度。当L是格｛0，1｝时，则不分明集中的A（x）对应于普通集合的特征函数。

我们定义不分明集的并、交、余如下：

$$(\bigcup_i A_i)(x)=\bigvee_i A_i(x) \qquad 当x\in X,$$

$$(\bigcap_i A_i)(x)=\bigwedge_i A_i(x) \qquad 当x\in X,$$

$$A'(x)=A(x)' \qquad 当x\in X。$$

定义不分明拓扑空间是一个对（X，τ），其中$\tau\subseteq L^X$(从X到L的所有的象)，并且τ对任意并及有限交是封闭的。在τ中一个集合是开的而当它的余集在τ中时它是闭的。如果（X，τ_1）和（Y，τ_2）是不分明拓扑空间，又如对每个τ_2开集U有f^{-1}（U）$\in\tau_1$（当$x\in X$时，$f^{-1}(U)(x)=U(f(x))$）时，则称映射f：$X\to Y$是连续的。不分明集的内部和闭包定义的方法是显然的（见〔1〕）。

3．拟一致性

考虑在通常拓扑意义下X上的拟一致性。元素D是$X\times X$的一个子集。我们定义D：$2^X\to 2^X$用$D(V)=\{y|x\in V且(x,y)\in D\}$表示。显然，对于在$2^X$中的$V$和$V_\lambda$有$V\subseteq D(V)$和$D(\bigcup V_\lambda)=\bigcup D(V_\lambda)$。相反地，给$D$：$2^X\to 2^X$满足对于在$2^X$中的$V$和$V_\lambda$有$V\subseteq D(V)$和$D(\bigcup V_\lambda)=\bigcup D(V_\lambda)$，我们可以定义$D\subseteq X\times X$使得$D$包含由$D=\{(x,y)|y\in D(\{x\})\}$表示的对角线，为了定义不分明拓扑的拟一致性，我们取拟一致的基元素，它属于象D：$L^X\to L^X$的集合$\mathscr{D}$的元素，并满足：

（A1） $V\subseteq D(V)$ 当$V\in L^X$

（A2） $D(\bigcup V_\lambda)=\bigcup D(V_\lambda)$ 当$V_\lambda\in L^X$。

上面定义中拟一致的意义是什么？我们还需要一些预备知识。

引理1． 假定L是一个完全分配格和$\alpha\in L$。则存在集$B\subseteq L$使得$sup\beta=\alpha$，并且如果$A\subseteq L$又满足$supA=\alpha$，则对每个$\beta\in B$存在$\gamma\in A$使得$\beta\leq\gamma$。

证明： 考虑使得$supA=\alpha$的所有可能的集合$A\subseteq L$。指标集为$\{A_j|j\in J\}$，在集合中的指标元素用$A_j=\{\alpha_{ij}|i\in I_j\}$表示。考虑

$$B=\{\bigwedge_{j\in J}\alpha_{i(j)j}|i\in\prod I_j\}$$

则

$$SupB=\bigvee_{i\in\prod I_j}(\bigwedge_{j\in J}\alpha_{i(j)j})$$

$$=\bigwedge_{j\in J}(\bigvee_{i(j)\in I_j}\alpha_{i(j)j})$$

$$=\bigwedge_{j\in J}\alpha$$

$$=\alpha.$$

又当$K\in J$时，$\bigwedge_{j\in J}\alpha_{i(j)j}\leqslant\alpha_{\lambda(k)k}$。于是，对每个$\beta\in B$，存在$\gamma\in A_i$使得$\beta\leqslant\gamma$（对任何$K\in J$）。

引理2. 假定L是一个完全分配格，且f：$L\to L$满足：

（$a1$） $\alpha\leq f(\alpha)$ 当$\alpha\in L$。

（$a2'$） $\alpha\leq\beta$ 蕴含着 $f(\alpha)\leq f(\beta)$ 当α、$\beta\in L$、则由下式定义的f^*：$L\to L$：

$$f^*(\alpha)=\bigwedge_{\sup\Gamma=\alpha}\left(\bigvee_{\gamma\in\Gamma}f(\gamma)\right)$$

是最大的g：$L\to L$，它的值小于或等于f，且满足：

（$a1$） $\alpha\leq g(\alpha)$ 当$\alpha\in L$。

（$a2$） $g(\bigvee_i\alpha_i)=\bigvee_i g(\alpha_i)$ 当$\alpha_i\in L$。

又对于B如同引理1中的一样，$f^*(\alpha)=\bigvee_{\beta\in B}f(\beta)$。

证明： 显然f^*满足（$a1$）和（$a2'$）。又当$\alpha\in L$时，$f^*(\alpha)\leq f(\alpha)$。

选择如同引理1中的B。如果$\sup\Gamma=\alpha$，则对每个$\beta\in B$存在$\gamma\in\Gamma$使得$\beta\leq B$。所以

$$\bigvee_{\beta\in B}f(\beta)\leq\bigvee_{\gamma\in\Gamma}f(\gamma)$$

蕴含着 $$f^*(\alpha)=\bigvee_{\beta\in B}f(B)$$

设$\bigvee_i\alpha_i=\alpha$，则可以找到B_i使得$\sup B_i=\alpha_i$并

且 $$f^*(\alpha_i)=\bigvee_{\beta_i\in B_i}f(\beta_i)$$

即 $$\bigvee f^*(\alpha_i)=\bigvee_i\bigvee_{\beta_i\in B_i}f(\beta_i)$$

$$\geq f^*(\alpha) \qquad 因为\sup\bigvee_i B_i=\alpha。$$

f^*显然是上述最大的g。

定义1. 设f_1：$L\to L$和f_2：$L\to L$满足($a1$)，($a2$)（如像引理2）。设g：$L\to L$由$g(\alpha)=f_1(\alpha)\wedge f_2(\alpha)$ 定义（即g满足($a1$)和($a2'$)）。则$f_1\wedge f_2$：$L\to L$由$f_1\wedge f_2=g^*$定义(即$f_1\wedge f_2$满足(a_1)和(a_2))。

引理3. 假定f_1：$L\to L$和f_2：$L\to L$满足($a1$)和($a2$)，则

$$(f_1\wedge f_2)(\alpha)=\bigwedge_{\alpha_1\vee\alpha_2=\alpha}(f_1(\alpha_1)\vee f_2(\alpha_2))。$$

证明： $$f_1\wedge f_2(\alpha)=\bigwedge_{\sup\Gamma=\alpha}\left(\bigvee_{\gamma\in\Gamma}(f_1(\gamma)\wedge f_2(\gamma))\right)$$

$$=\bigwedge_{\sup\Gamma=\alpha}\left(\bigwedge_{A\subseteq\Gamma}\left(\left[\bigvee_{\gamma\in A}f_1(\gamma)\right]\bigvee_{\gamma\notin A}\left[\bigvee f_2(\gamma)\right]\right)\right)$$

$$= \bigwedge_{\sup \Gamma = \alpha} \left(\bigwedge_{\Lambda \subseteq \Gamma} \left(f_1 \left(\bigvee_{r \in \Lambda} r \right) \vee f_2 \left(\bigvee_{r \notin \Lambda} r \right) \right) \right)$$

$$= \bigwedge_{\alpha_1 \vee \alpha_2 = \alpha} \left(f_1(\alpha_1) \vee f_2(\alpha_2) \right)。$$

〉注〉如果L是完全分配格，L^X也是完全分配格。因此，引理1．2和3中的L可以用L^X代替。于是（$a1$）和（$a2$）就是条件（$A1$）和（$A2$）。对于D：$L^X \to L^X$和E：$L^X \to L^X$，我们用$D \cap E$表示$D \wedge E$。对每个$V \in L^X$，如果$D(V) \subseteq E(V)$则说$D \subseteq E$。我们用函数合成定义$D \circ E$。现在能够定义拟一致性。

定义2．在集合X上的一个不分明拟一致性是$\mathscr{Q}$（所有满足($A1$)和($A2$)的映象的集合）的一个子集$\varnothing$使得：

（$Q1$）$\varnothing \neq \phi$。

（$Q2$）$D \in \varnothing$和$D \subseteq E \in \mathscr{Q}$蕴含着$E \in \varnothing$。

（$Q3$）$D \in \varnothing$和$E \in \varnothing$蕴含着$D \wedge E \in \varnothing$。

（$Q4$）$D \in \varnothing$蕴含着存在$E \in \varnothing$使得$E \circ E \subseteq D$。

〈注〉这个定义和对于$L = \{0,1\}$的通常的定义一致。而且（$Q3$）可以用下面（$Q3'$）代替。

（$Q3'$）$D_1 \in \varnothing$和$D_2 \in \mathscr{Q}$蕴含着存在$D \in \varnothing$使得$D \subseteq D_1$和$D \subseteq D_2$。

〈注〉满足（$Q4$）的$\mathscr{Q}$的任何子集$\mathscr{B}$在下述意义下生成不分明拟一致性，即所有$D \in \mathscr{B}$的集包含$\mathscr{B}$的元素的有限交是拟一致性。这样的集$\mathscr{B}$称为所生成的拟一致性的子基。如果$\mathscr{Q}$也满足（$Q3'$），则$\mathscr{B}$称为基。

在定义由拟一致性生成的不分明拓扑之前，先给出下列简单的命题。

命题4．假定映射i：$L^X \to L^X$满足内部公理：

（I1）$i(X) = X$。

（I2）$i(V) \subseteq V$　　　　当$V \in L^X$。

（I3）$i(i(V)) = i(V)$　　　　当$V \in L^X$。

（I4）$i((V \cap W) = i(V) \cap i(W)$　　　　当$V, W \in L^X$。

则$\tau = \{ V \in L^X \mid i(V) = V \}$是不分明拓扑，并且$i(V) = Int(V)$。

定义3，设$(X, \varnothing)$是一个拟一致性。Int：$L^X \to L^X$用$Int(V) = \bigcup \{ U \in L^X \mid D(U) \subseteq V$对某些$D \in \varnothing \}$来定义。

命题5．Int满足内部公理。

证明：（I1）和（I2）显然满足。

（I3）满足，因为：

如果U和V是不分明集合，并且$D \in \varnothing$使得$D(U) \subseteq V$，则可以找到$E \in D$，使得$E \circ E \subseteq D$。具体地说，$E(E(U)) \subseteq V$。于是$E(U) \subseteq Int(V)$，由此，并推出$U \subseteq Int(Int(V))$。所以，$Int(V) \subseteq Int(Int(V))$，并且因为由（$I2$）有另一方面的包含，于是有$Int(V) = Int(Int(V))$。

随后由（$Q3$）有（$Q4$）。

定义4．由D生成的不分明拓扑是Int生成的不分明拓扑。

因此特别注意$D(U)$是由D生成的拓扑中U的一个邻域。

引理6. 设(X,τ)是不分明拓扑空间。假定$D_i\in\mathscr{D}$且$D_i(U)$是任何不分明集U($i=1,2$)的一个邻域，则$(D_1\cap D_2)(U)$是任何不分明集U的一个邻域。

证明： 由引理1，2和3

$$(D_1\cap D_2)(U)=\bigcup_j(D_1(U_j)\cap D_2(U_j))$$

U是某些不分明集U_j的并，但是$D_i(U_j)$($i=1,2$)是U_j的一个邻域，因此$D_1(U_j)\cap D_2(U_j)$是U_j的一个邻域。即存在开集W_j使得$U_j\subseteq W_j\subseteq D_1(U_j)\cap D_2(U_j)$。因此$W=\bigcup_j W_j$是开的，并且$U\subseteq W\subseteq\bigcup_j(D_1(U_j)\cap D_2(U_j))$。

定理7. 每个不分明拓扑是不分明拟一致的。

证明： 设(X,τ)是不分明拓扑空间。G是在τ内的任一开集。

令 $D_G(V)=X$ 当$V\not\subseteq G$，

$\quad=G$ 当$V\subseteq G$。

即$D_G\circ D_G=D_G$。这样由命题6，$\{D_G|D\in\tau\}$构成生成拓扑拟一致性的子基。

我们可以在拟一致空间中定义拟一致连续性。

定义5. 设$(X,\varnothing)$和$(y,\mathcal{E})$是拟一致空间。如果对每个$E\in\mathcal{E}$存在$D\in\varnothing$使得$D\subseteq f^{-1}(E)$。即对$V\in L^X$，$D(V)\subseteq f^{-1}E(f(V))$。就说映射$f$：$X\to y$是拟一致连续的。

命题8. 每个拟一致连续函数在诱导不分明拓扑中是连续的。

证明： 设f：$X\to Y$是拟一致连续的。在由$\mathcal{E}$生成的不分明拓扑中考虑一个开集V。即$V=\bigcup\{U|E(U)\subseteq V$对某些$E\in\mathcal{E}\}$。如果$E(U)\subseteq V$则存在$D\in\varnothing$使得

$$Df^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(E(ff^{-1})(U))\subseteq f^{-1}(E(U)\subseteq f^{-1}(V)\text{参考[1]})。$$

即$f^{-1}(U)\subseteq Int f^{-1}(V)$，所以

$$\bigcup\{f^{-1}(U)|E(U)\subseteq V\text{对某些}E\in\mathcal{E}\}\subseteq Int(f^{-1}(V))。$$

但$f^{-1}(\bigcup U_\lambda)=\bigcup f^{-1}(U_\lambda)$，因此$f^{-1}(V)\subseteq Int(f^{-1}(V))$。即$f^{-1}(V)$是开的，这就是连续性的定义。

我们现在利用拟一致性来证明对应于拟伪度量性的特征的一个定理。我们有效地利用拟一致性的一个特殊类来定义拟伪度量性。有一个变换方法使拟一致性到一个映射内满足从$X\times X$到独异点的三角不等式。但这仅仅是一个表示方法的改变。利用这个特殊基的叙述，此刻似乎更直观。因此我们保留这种情况。

定理9.（拟伪度量）说$(X,\varnothing)$是拟一致性，则有一个基$\{D_r|r\in R,r>0\}$使得$D_r\circ D_s\subseteq D_{r+s}$($r$和$s$是正实数)的充要条件是$\varnothing$有一个可数基。

证明：（$\Longrightarrow$）是显然的。

（$\Longleftarrow$）反之，假定$\varnothing$有一个可数基$\{U_n|n=1,2,3,\cdots\}$。可以选择$\{U_n\}$使得$U_n\circ U_n\circ U_n\subseteq U_{n-1}$（例如[4]）。

当$\varepsilon>0$时，如果$2^{-n}\leq\varepsilon\leq2^{-(n-1)}$由$\phi_\varepsilon=U_n$定义$\phi_\varepsilon\in\varnothing$；如果$1\leq\varepsilon$，由$\phi_\varepsilon(V)=X$定义$\phi_\varepsilon\in\varnothing$。（因而$\phi_\varepsilon\circ\phi_\varepsilon\circ\phi_\varepsilon\subseteq\phi_{2\varepsilon}$）。

定义 $$D_\varepsilon=\bigcup_{\sum_{i=1}^{K}\varepsilon_i=\varepsilon}\phi\varepsilon_1\circ\cdots\circ\phi\varepsilon_K。$$

因为ϕ_ϵ在$\mathcal{D}$中，故D_ϵ显然也$\mathcal{D}$在中。现在

（1）显然$\phi_\epsilon \sqsubseteq D_\epsilon$

（2）$D_\epsilon \sqsubseteq \phi_{2\epsilon}$，　　因为

如果$K=1$，$\phi\epsilon_1\circ\cdots\circ\phi\epsilon_K \sqsubseteq \phi_{2\epsilon}$是显然的。假定$K>1$并且如果$l<K$和$\epsilon>0$，则$\phi\epsilon_1\circ\cdots\circ\phi\epsilon_l \sqsubseteq \phi_{2\epsilon}$（其中$\epsilon_1+\cdots+\epsilon_l=\epsilon$）考虑$\phi\epsilon_1\circ\cdots\circ\phi\epsilon_K$（其中$\epsilon_1+\cdots+\epsilon_K=\epsilon$）。选择使得$\epsilon_1+\cdots+\epsilon_j\leq\frac{1}{2}\epsilon$成立的最大的$j$。于是$\epsilon_{j+2}+\cdots+\epsilon_K\leq\frac{1}{2}\epsilon$。由归纳法：

$$\phi\epsilon_1\circ\cdots\circ\phi\epsilon_j \sqsubseteq \phi\epsilon,$$

$$\phi\epsilon_{j+1} \sqsubseteq \phi\epsilon,$$

$$\phi\epsilon_{j+2}\circ\cdots\circ\phi\epsilon_K \sqsubseteq \phi\epsilon。$$

所以　$\phi\epsilon_1\circ\cdots\circ\phi\epsilon_K \sqsubseteq \phi\epsilon\circ\phi\epsilon\circ\phi\epsilon,$

$\sqsubseteq \phi_2\epsilon。$

因此$\{D_\epsilon|\epsilon>0\}$生成与拟一致性一样的$\{\phi\epsilon\}$和$\{U_\epsilon\}$。族$\{D_\epsilon|\epsilon>0\}$显然满足$D_\epsilon\circ D_\epsilon \sqsubseteq D_{\epsilon+\epsilon}$。

4．一　致　性

考虑在普通拓扑意义下的一致性。我们用$(x,y)\in D^{-1}$来定义D^{-1}，$(x,y)\in D^{-1}$的充要条件是$(y,x)\in D$。等价的叙述是：

$y\in D^{-1}(\{x\})$的充要条件是$x\in D(\{y\})$，

$y\notin D^{-1}(\{x\})$的充要条件是$x\notin D(\{y\})$，

$D^{-1}(\{x\})\sqsubseteq\{y\}'$的充要条件是$D(\{y\})\sqsubseteq\{x\}'$，

$D^{-1}(V)\sqsubseteq U'$的充要条件是$D(U)\sqsubseteq V'$。

给出下面的定义：

定义6．设L是有反序对合“，”的完全分配格。设$f: L\to L$满足（$a1$）和（$a2$）。则用$f^{-1}(\alpha)=inf\{\beta|f(\beta')\in\alpha'\}$定义$f^{-1}: L\to L$。

命题10．（1）$f(\alpha)\leq\beta$的充要条件是$f^{-1}(\beta')\leq\alpha'$。

（2）f^{-1}满足（$a1$）和（$a2$）。

（3）$(f^{-1})^{-1}=f$。

（4）$f\leq g$的充要条件是$f^{-1}\leq g^{-1}$。

（5）$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$。

证明：（1）（$\Longrightarrow$）是显然的。

（$\Longleftarrow$）成立，因为如果$f^{-1}(\beta')\leq\alpha'$则

$$f(\alpha)\leq f(f^{-1}(\beta')')$$

$$=f(V\{\gamma|f(\gamma)\leq\beta\})V\{f(\gamma)|\leq\beta\}$$

$$\leq\beta$$

（2）（$a1$）是显然满足的。

（$a2$）也是满足，因为

$\bigvee f^{-1}(\alpha_i)\sqsubseteq\beta \Longleftrightarrow f^{-1}(\alpha_i)\sqsubseteq\beta$　对所有i，

$\Longleftrightarrow f(\beta')\sqsubseteq\alpha_i'$ 对所有i,

$\Longleftrightarrow f(\beta')\sqsubseteq(\bigvee\alpha_i)$

$\Longleftrightarrow f^{-1}(\bigvee_i\alpha_i)\sqsubseteq\beta$

所以 $f^{-1}(\bigvee_i\alpha_i)=\bigvee_i f^{-1}(\alpha_i)$。

（3）、（4）和（5）由类似的论证得到。

命题11. $(f_1\wedge f_2)^{-1}=f_1^{-1}\wedge f_2^{-1}$。

证明： 设$\Delta\sqsubseteq L$使得$sup\Delta=\alpha$，并且，如果$sup\Gamma=\alpha$，则对每个$\delta\in\Delta$存在$\gamma\in\Gamma$使得$\delta\leq\gamma$(如在引理1中)。

• 译者注：原文中为$f^{-1}(\beta')\sqsubseteq\alpha'$应为$f^{-1}(\beta')\leq\alpha'$。

则

$(f_1\wedge f_2)^{-1}(\alpha)$

$=\wedge\{\beta|(f_1\wedge f_2)(\beta')\leq\alpha'\}$

$=\wedge\{\beta|\bigwedge_{\beta_1\wedge\beta_2=\beta}(f_1(\beta_1')\vee f_2(\beta_2'))\leq\alpha'\}$

$=\wedge\{\beta|\forall\delta\in\Delta.\ \exists\beta_1,\ \beta_2$使得$\beta_1\wedge\beta_2=\beta$和$f_1(\beta_1')\vee f_2(\beta_2')\leq\delta'\}$

$=\bigvee_{\delta\in\Delta}(\wedge\{\beta|\exists\beta_1,\ \beta_2$使得$\beta_1\wedge\beta_2=\beta$和$f_1(\beta_1')\leq\delta',\ f_2(\beta_2')\leq\delta'\})$

$=\bigvee_{\delta\in\Delta}(\wedge\{\beta_1\wedge\beta_2|f_1(\beta_1')\leq\delta'$和$f_2(\beta_2')\leq\delta'\})$

$=\bigvee_{\delta\in\Delta}(f_1^{-1}(\delta)\wedge f_2^{-1}(\delta))$

$=(f_1^{-1}\wedge f_2^{-1})(\alpha)$ （由引理3）。

如果L是有反序对合“,”的完全分配格，则即是L^X。因此，对于每个在$\mathscr{Q}$中的$D:L\to L$我们能够像定义6中一样定义D^{-1}。注意如果$\mathscr{D}$是在X上的拟一致性，则即是$\mathscr{D}^{-1}=\{D^{-1}|D\in\mathscr{D}\}$。又如果$D\in\mathscr{D}$，则$(D\wedge D^{-1})^{-1}=D\sqcap D^{-1}$，即$D\sqcap D^{-1}$是对称的。

我们现在能够定义一致空间。

定义7. 拟一致性$\mathscr{D}$是一致性，如果它满足：

（Q5） $D\in\mathscr{D}$ 蕴含着$D^{-1}\in\mathscr{D}$。

或等价地，

（Q5′） $\mathscr{D}$有对称元素的一个基。

在［3］中介绍了不分明单位区间，定个如下：

定义8. 不分明单位区间［0,1］(L)是所有单调减少映射λ：$R\to L$的集合。对于λ：

$\lambda(t)=1$ 当$t<0$，

$\lambda(t)=0$ 当$t>0$，

在给出了λ：$R\to L$和M：$R\to L$后，如果：

$\lambda(t-)=M(t-)$ 当$t\in R$

和 $\lambda(t+)=M(t+)$ 当$t\in R$

其中 $\lambda(t+)=sup\lambda(S)$，等等。

我们像由子基$\{L_t,\ R_t|t\in R\}$生成的拓扑一样来定义［0,1］(L)上的不分明拓扑。其中

$$L_t:\ [0,1](L)\to L$$

和 $$R_t:\ [0,1](L)\to L$$

由下式定义：

$$L_t(\lambda)=\lambda(t-)',$$

$$R_t(\lambda)=\lambda(t+)。$$

不分明拓扑 $\{R_t|t\in R\}$ 称为右拓扑。

我们能够在$[0,1](L)$上建立一个一致结构如下：

定义9. B_ε：$L^X\to L^X$ 由下式定义：

$$B_\varepsilon(U)=R_{t-\varepsilon}\text{ 其中}t\text{是}s\in R\text{使得}U\subseteq Ls'\text{的最大的}S$$

$$=\bigcap\{R_{s-\varepsilon}|U\subseteq L_s'\}$$

命题12. （1）B_ε满足（A_1）和（A_2）。

（2）$B_\varepsilon^{-1}=\bigcap\{L_{s+\varepsilon}|U\subseteq R_s'\}$。

（3）$B_\varepsilon oB_\delta\subseteq B_{\varepsilon+\delta}$（特别地$B_\varepsilon oB_\varepsilon\subseteq B_{2\varepsilon}$）

证明： （1）因为$L_s'\subseteq R_{s-\varepsilon}$，（$A_1$）是满足

（A_2）也是满足，因为：

$$U_\lambda\subseteq L_{s\lambda}'\Rightarrow\forall\delta>o\qquad U_\lambda\subseteq R_{s\lambda-\delta}$$

$$\Rightarrow\forall\delta>o\qquad\bigcup U_\lambda\subseteq\bigcup_\lambda Rs_\lambda-\delta$$

$$\Rightarrow\forall\delta>o\qquad\bigcup U_\lambda\subseteq R_{\lambda s_\lambda}-\delta$$

$$\Rightarrow\forall\delta>o\qquad\bigcup U_\lambda\subseteq R_{\lambda s_\lambda}-\delta$$

$$\Rightarrow\qquad\bigcup U_\lambda\subseteq L'_{\lambda s_\lambda}$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(\bigcup U_\lambda)\subseteq R_{\lambda s_\lambda}-\varepsilon$$

$$=\bigcup_\lambda B_\varepsilon(U_\lambda)。$$

另一方面的包含关系是显然的。

$$(2)\ B_\varepsilon^{-1}(U)=\bigcap\{V|B_\varepsilon(V')\subseteq U'\}$$

$$=\bigcap\{L_t|B_\varepsilon(L_t')\subsetneq U\}$$

$$=\bigcap\{L_t|R_{t-\varepsilon}\subsetneq U\}$$

$$=\bigcap\{L_{t+\varepsilon}|U\subseteq R_t'\}$$

$$=L_{t+\varepsilon}\text{，其中}t\text{是使得}U\subseteq R_s'\text{的最小的}S。$$

$$(3)\ B_\varepsilon(B_\delta(U))=B_\varepsilon(R_{t-\varepsilon})\text{ 其中}t\text{是使得}U\subseteq L_s'\text{的最大的}S。$$

$$=R_{t-\delta-\varepsilon}$$

$$=R_{\varepsilon+\delta}(U)$$

推论13. 集$\{B_\varepsilon|\varepsilon>o\}$是关于生成右拓扑的拟一致性的基。

证明. 在由$\{B_\varepsilon\}$生成的拓扑内的每个开集在普通右拓扑内是开的，因为它是形如$B_\varepsilon(U)$（$=R_t$对某些t）的集合的并。

反之，因为$B_\varepsilon(L_{t+\varepsilon})=R_t$和$\bigcup\limits_{\varepsilon>0}L_{t+\varepsilon}=R_t$，所以$R_t$在由$\{B_\varepsilon\}$生成的拓扑内。

推论14. 集$\{B_\varepsilon,\ \beta_\varepsilon^{-1}|\varepsilon>0\}$是关于$[0,1](L)$上一致性的子基。由一致性生成的拓扑是普通的不分明拓扑。

这个一致性称为在$[0,1](L)$上对于普通不分明拓扑的普通一致性。

我们现在就可以描述一致性如下：

定理15. 设$(X,\mathscr{D})$是一致空间且$D\in\mathscr{D}$。假定$D(U)\subseteq V$，则存在一个一致连续函数$f:X\to[0,1](L)$，使得

$$U(x)\leq f(x)(1-)\leq f(x)(0+)\leq V(x) \qquad \text{当}x\in X。$$

证明 构造不分明集$\{A_r|r\in R\}$使得

(1) $A_r=X$ 当$r<0$

(2) $A_r=\Phi$ 当$r>1$

(3) $A_0=V$

(4) $A_1=U$

并且一致性的对称元素$\{D_\varepsilon|\varepsilon>o\}$使得

$$D_\varepsilon(A_r)\subseteq A_{r-\varepsilon} \qquad \text{当}r\in R。$$

因为D_ε是对称的，我们有：

$$D_\varepsilon(A_r')\subseteq A_{r+\varepsilon}'。$$

由$f(x)(r)=A_r(x)$定义$f: X\to[0,1](L)$。显然f是可定义的而且满足

$$U(x)\leq f(x)(1-)\leq f(x)(0+)\leq V(x) \qquad \text{当}x\in X。$$

所以我们仅要求证明f是一致连续的。显然

$$f^{-1}(R_t)=\bigcup_{s>t}A_s \qquad \text{和}f^{-1}(L_t')=\bigcap_{s<t}A_s$$

因此

$$D_\varepsilon(f^{-1}(L_t')\subseteq D_\varepsilon(A_{t-\delta}) \qquad \text{对任何}\delta>0$$

$$\subseteq A_{t-\delta-\varepsilon}$$

$$\subseteq\bigcup_{s>t}A_{s-2\delta-\varepsilon}$$

$$\subseteq f^{-1}(B_{\varepsilon+2\delta}(L_t'))。$$

设$\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$，有$D_\varepsilon\subseteq f^{-1}(B_{2\varepsilon})$。显然$D_\varepsilon\subseteq f^{-1}(B_{2\varepsilon}^{-1})$因此$f$是一致连续的。

推论16. 设$(X,\mathscr{D})$是一致空间，U是在由U生成的不分明拓扑中的一个开集，则存在一个集族$\{W_\lambda\}$，使得$\bigcup W_\lambda=U$和连续函数f_λ：$X\to[0,1](L)$使得

$$W_\lambda(x)\leq f_\lambda(x)(1-)\leq f_\lambda(x)(0+)\leq U(x) \qquad \text{当}x\in X。$$

证明 因为U是开的，则$U=\bigcup\{W|D(W)\subseteq U\}$。应用前面定理。

（注）对每一开集U存在一个集族$\{W_\lambda\}$和连续函数的条件（如上面定义中），等价于拓扑情况的完全正则性（因为$\{W_\lambda\}$也可以全部单一的包含在U内）。

我们利用这个作为不分明拓扑空间完全正则性的定义。

现在证明推论16的逆命题是正确的。

定理17. 假定(X,τ)是完全正则不分明拓扑空间，则(X,τ)是一致的。

证明： 集合$\{f^{-1}(B_\varepsilon), f^{-1}(B^{-1}_\varepsilon)|f: X\to[0,1](L)$是连续的且$\varepsilon>0\}$构成一致性$\mathscr{D}$的一个子基，因为：

(1) $f^{-1}(B_\varepsilon)\circ f^{-1}(B_\delta)\subseteq f^{-1}(B_{\varepsilon+\delta})$

(2) $f^{-1}(B_\varepsilon^{-1})=f^{-1}(B_\varepsilon)^{-1}$。

由一致性诱导的拓扑，因为

（1）任何连续函数$f: X \mapsto [0,1](L)$在$(X, \varnothing)$内是一致连续的，因而由$\varnothing$生成的拓扑内连续，因而由$\varnothing$诱导的拓扑是比τ粗的。

（2）但是，假定U是在τ内是开的，可以找到$\{W_\lambda\}$使得$\bigcup W_\lambda = U$和$f_\lambda: X \to [0,1](L)$使得

$$W_\lambda(x) \leq f_\lambda(x)(1-) \leq f_\lambda(x)(0+) \leq U(x)。$$

因此，特别$f_\lambda^{-1}(B_{\frac{1}{2}})(W_\lambda) \subseteq U$，因而在由$\varnothing$生成的拓扑由$W_\lambda \subseteq I_{u}(U)$。于是$U$在由$\varnothing$生成的拓扑内是开的。

参 考 文 献

1. C.L.CHANG. Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl。24 (1968), 191—201。
2. J. A. GOCUEN. the fuzzy Tychonoff theorem J.Math. Anal. Appl。43 (1973) 734—742。
3. B. HUTTON. Normality in fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl。50 (1975) 74—79。
4. B. HUTTON AND I. Reilly, Separation axioms in fuzzy topological spaces, to appear。
5. W. J. PEPVIN, "Foundations of General Topology," Academie press, New York, 1964。
6. C. K.WOGN, Covering propertics of fuzzy topoeogical spaces,J. Math Anal. Appl. 43 (1973) 697—704.
7. L. A. ZADEH. Fuzzy sets, Inform, Contr. 8 (1965) 338—353.
8. B. HUTTON, Fuzzy topological spaces. PhD Thesis, University of Warwick, England CV47AL。

（本文译自 J. Math · Anath · Anal · APPl · 50 (1975), 75～79.

（董根银、张露娜译，阎昌龄校）

不分明拓扑空间中的正规性

Bruce Hutton

1．前　　言

本文将拓扑空间中的正规性概念，推广到文〔1〕中引进的不分明拓扑空间。

正规性是可纯由开集和闭集性质（即，不提及点）的语言加以定义的几个分离公理之一，我们将采用"Urysohn"式引理来刻划正规性，并在这一过程中构造出一个不分明拓扑空间来，就象通常拓扑空间中的单位区间一样，它在不分明拓扑空间中起着重要作用。

2．一些准备

假设考虑集X。若把X的子集A和它的特征函数$\chi_A: X \longrightarrow \{0,1\}$，视为同一，则可考虑以$A$（即，$\chi_A$）在$X$中的点$\chi$处的值，作为$x$隶属于$A$的程度。当用更一般的格代替$\{0,1\}$时，就得到所谓不分明集，更精确地，设$(L,\leqslant,')$是具有逆序对合$'$的完全分配格，则$X$上的$L$—不分明集是一个映射$A: X \to L$。承认比$\{0,1\}$更为一般的格，就容许了集合的隶属关系$P$有比"是一个元素"和"不是一个元素"更多的隶属程度。L作为具有概率空间结构集的子集族，也许是最重要的一例。

统贯本文，我们将考虑一个任意而确定的上述类型的格$(L,\leqslant,')$。现在定义不分明集的并、交和补如下：

$$(\bigcup_i A_i)(x) = \bigvee_i A_i(x).\quad x \in X.$$

$$(\bigcap_i A_i)(x) = \bigwedge_i A_i(x).\quad x \in X.$$

$$A'(x) = A(x)',\quad x \in X.$$

我们定义不分明拓扑空间为一个偶(X,τ)，这里X是集，τ是L—不分明集的集族，它关于集的任意并和有限交是闭合的。当一个集在τ中，就叫做开集；而当它的补集在τ中，就叫做闭集。设(X,τ_1)和(Y,τ_2)是不分明拓扑空间，若映射$f: X \to Y$，对τ_2的每个开集U，$f^{-1}(U) \in \tau_1$，这里

$$f^{-1}(U)(x) = U(f(x))\quad 对x \in X,$$

则f叫做连续的。不分明集的内部和闭包的定义方法是显见的（参见〔1〕）。

3．正规性和不分明单位区间

定义1． 不分明拓扑空间是正规的，若对每一闭集K和每一开集U合于$K \subseteq U$，存在集V合于

$$K\subseteq V^{0}\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$

由此可知，需要证明等价于Urysohn引理的不分明拓扑空间是下面的：

定义 2．不分明单位区间〔0，1〕(L)是全体单调递减映射λ的集，$\lambda: \mathbb{R}\to L$，满足：

(1) $\lambda(t)=1$ 对$t<0$，$t\in\mathbb{R}$，

(2) $\lambda(t)=1$ 对$t>1$，$t\in\mathbb{R}$，

$\lambda:\mathbb{R}\to L$ 和 $\mu:\mathbb{R}\to L$ 视为相等，若对每一$t\in\mathbb{R}$有$\lambda(t-)=\mu(t-)$且$\lambda(t+)=\mu(t+)$（这里 $\lambda(t-)=\inf_{s<t}\lambda(s)=\lim_{s\uparrow t}\lambda(s)$，等）。

在〔0，1〕(L)上可定义偏序$\lambda\leqslant\mu$，若对每一$t\in\mathbb{R}$，$\lambda(t-)\leqslant\mu(t-)$且$\lambda(t+)\leqslant\mu(t+)$。还可以使$\gamma\in$〔0，1〕和映射$R:\mathbb{R}\to L$同一起来，这里$R(t)=1$，当$t<\gamma$，而$R(t)=0$，当$t>\gamma$，从而把通常单位区间嵌入不分明单位区间。

取$\{L_t, R_t \mid t\in\mathbb{R}\}$作子基，这里规定 $L_t(\lambda)=\lambda(t-)'$，$R_t(\lambda)=\lambda(t+)$，我们就定义了〔0，1〕($L$)上的不分明拓扑，它叫做〔0，1〕($L$)上的正常拓扑，而$\{L_t \mid t\in\mathbb{R}\}$和$\{R_t \mid t\in\mathbb{R}\}$分别叫做左侧拓扑和右侧拓扑。

注意，这些真是拓扑，而且对$L=\{0, 1\}$，〔0，1〕(L)及其拓扑归化为〔0，1〕及其通常拓扑。

定理 1 （Urysohn引理）．不分明拓扑空间（X，τ）是正规的，当且仅当，对每一闭集K和每一开集U合于$K\subseteq U$，存在连续函数$f: X\to$〔0，1〕(L)，合于：对每一$x\in X$

$$K(x)\leqslant f(x)(1-)\leqslant f(x)(0+)\leqslant U(x).$$

证．（$\Leftarrow$）由

$K(x)\leqslant f(x)(1-)\leqslant f(x)(0+)\leqslant U(x)$，对任何$t\in(0, 1)$有

$$K(x)\leqslant f(x)(t+)\leqslant f(x)(t-)\leqslant U(x).$$

而$f^{-1}(L_t')(x)=f(x)(t-)$且$f^{-1}(R_t)=f(x)(t+)$。由于f是连续的，则有$f^{-1}(L_t')$是闭的且$f^{-1}(R_t)$是开的（参见〔1〕）。因此

$$K\subseteq f^{-1}(R_t)\subseteq f^{-1}(L_t')\subseteq U,$$

这就是（X，τ）为正规。

（$\Rightarrow$）反过来，构造$\{V_r \mid \gamma\in(0, 1)\}$使$K\subseteq V_r\subseteq U$且$\gamma<s$蕴含$\overline{V}_s\subseteq V_r^{0}$（例如参见〔3〕）。定义 $f(x)(t)=V_t(x)$。显然

$$K(x)\leqslant f(x)(1-)\leqslant f(x)(0+)\leqslant U(x).$$

而

$$f^{-1}(R_t)=\bigcup_{r>t}(V_r)=\bigcup_{r>t}V_r^{0}$$

是开的，且

$$f^{-1}(L_t')=\bigcap_{r<t}(V_r)=\bigcap_{r<t}\overline{V}_r$$

是闭的，因此f是连续的。

我们注意到完全正规性在不分明拓扑空间也有自然的扩充。

定义 3．不分明拓扑空间是完全正规的，若对每一闭集K和每一开集U合于$K\subseteq U$，存在连续函数$f: X\to$〔0，1〕(L)合于：对每一$x\in X$

$$K(x)=f(x)(1-)\leqslant f(x)(0+)=U(x).$$

定理 2．不分明拓扑空间是完全正规的，当且仅当，它是正规的，且每一闭集是可数个

开集的交。

这一证明是定理1的简单推论和通常拓扑证明的推广。

4．不分明单位区间的性质

现在来描述不分明单位区间的某些性质。特别，要指出在某种格的条件下，不分明单位区间的不分明拓扑就同通常单位区间的拓扑一致。

定理3．设$(L,\leqslant,')$是具有正交补的完全分配格，则在$[0,1]$的通常拓扑中的开集和$[0,1](L)$的不分明拓扑中的开集之间，存在一个自然的1—1对应，保持着任意并和有限交。

证：

（1）$[0,1]$中的每一开集可唯一地写成非空的不相交的开区间的并$\bigcup_i(a_i,b_i)$（容许$a_i\in[0,1]\cup\{-\infty\}$和$b_i\in[0,1]\cup\{+\infty\}$，且$(-\infty,b)$解释为$[0,b]$等）。定义一个从$[0,1]$的拓扑到$[0,1](L)$的拓扑的映射$\phi$：

$$\phi(\bigcup_i(a_i,b_i))(\lambda)=\bigvee_i(\lambda(a_i+)\wedge\lambda(b_i-)').$$

ϕ显然是明确的。

（2）ϕ是1—1的。

若R是$[0,1](L)$中代表$r\in[0,1]$的元素，则当$r\in U$，$\phi(U)(R)=1$，当$\gamma\notin U$，$\phi(U)(R)=0$。但$U\neq V$蕴含存在$r\in[0,1]$属于U或V之一而不属于另一，从而$\phi(U)(R)\neq\phi(V)(R)$。因此$\phi(U)\neq\phi(V)$。

（3）$\phi(U\cap V)=\phi(U)\cap\phi(V)$。

设$U=\bigcup(a_i,b_i)$且$V=\bigcup(c_j,d_j)$。则

$$U\cap V=\bigcup_{i,j}[(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)]$$

且每一$(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)$是不相交的。因此

$$\begin{aligned}[\phi(U)\cap\phi(V)](\lambda)&=\bigvee_{i,j}[\lambda(a_i+)\wedge\lambda(b_i-)'\wedge\lambda(c_j+)\wedge\lambda(d_j-)']\\&=\bigvee_{i,j}[\lambda(a_i\vee c_j+)\wedge\lambda(b_i\wedge d_j-)']\\&=\phi(U\cap V)(\lambda).\end{aligned}$$

由于当$(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)=\phi$则$b_i\wedge d_j\leqslant a_i\vee c_j$且由此

$$\lambda(a_i\vee c_j+)\wedge(b_i\wedge d_j-)'=0.$$

另一方面

$$(a_i,b_i)\cap(c_j,d_j)=(a_i\vee c_j,b_i\wedge d_j).$$

（4）$\phi(\bigcup_iU_i)=\bigwedge_i\phi(U_i)$。

首先在一个正交补的分配格L中，若$\alpha,\beta,\gamma\in L$且$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$，就有

$$(\alpha\wedge\beta')\vee(\beta\wedge\gamma')=\alpha\wedge\gamma'.$$

这是因为

$$\begin{aligned}(\alpha\wedge\beta')\vee(\beta\wedge\gamma')&=(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma')\wedge(\beta\vee\beta')\wedge(\beta'\vee\gamma')\\&=\alpha\wedge(\alpha\vee\gamma')\wedge\gamma'\\&=\alpha\wedge\gamma',\end{aligned}$$

再设$U=(a,b)$，$V=(c,d)$。则$\phi(U\cup V)=\phi(U)\cup\phi(V)$。当$U\cap V=\phi$或$U\subseteq V$，这是平凡的，一般地，$a<c<b<d$也对。令$e$合于$c<e<b$。于是

$$
\begin{aligned}
[\phi(U)\cup\phi(V)](\lambda) &= [\lambda(a+)\wedge\lambda(b-)']\vee[\lambda(c+)\wedge\lambda(d-)'] \\
&\geqslant [\lambda(a+)\wedge\lambda(e)']\vee[\lambda(e)\wedge\lambda(d-)'] \\
&= \lambda(a+)\wedge\lambda(d-)' \\
&= \phi(U\cup V)(\lambda).
\end{aligned}
$$

而另一不等式是平凡的。

因此根据实直线的简单性质得到

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\phi(U_i)$$

对开区间U_i。

现在证明一般情形。设U_i是$[0,1]$中的任意开集。考虑$\bigcup_i U_i$中的任意开区间(a,b)和闭区间$[c,d]\subseteq(a,b)$。由$[c,d]$的紧性，可以找到开区间的一个有限子覆盖，这些开区间中的每一个都包含在某些U_i中。由对区间的有限并的结果，有$\phi(c,d)\subseteq\bigcup_i\phi(U_i)$。设$c$下收敛于$a$而$d$上收敛于$b$。完全分配性蕴含$\lambda(c+)\wedge\lambda(d-)'$上收敛于$\lambda(a+)\wedge\lambda(b-)'$，对$\lambda\in[0,1](L)$。因此$\phi(a,b)\subseteq\bigcup_i\phi(U_i)$，且由$\phi$的定义有$\phi(\bigcup U_i)\subseteq\bigcup_i\phi(U_i)$。相反的包含关系是平凡的。

（5）ϕ是满映。

集$\{\phi(a,b)\mid a,b\in[0,1]\cup\{+\infty,-\infty\},a<b\}$构成$[0,1](L)$的开集的基底，而$\{(a,b)\mid a,b\in[0,1]\cup\{+\infty,-\infty\},a<b\}$构成$[0,1]$的开集的基底，因此由（4）$\{\phi(U)\mid U$开于$[0,1]\}$是$[0,1](L)$的拓扑。

推论4．设L是具有正交补的完全分配格，则任何纯由开集和闭集的术语表述的对$[0,1]$为真的陈述，对$[0,1](L)$也真。

推论5．设L是具有正交补的完全分配格，则$[0,1](L)$是完全正规的，它在[1]，[2]和[4]的意义下是紧的，而且当U是既开且闭的不分明集时，有$U=\phi$或$U=[0,1](L)$，且在此意义下也是连通的。

致　谢

作者对Ivan L. Reilly博士的一些建议，谨表示感谢。

参 考 文 献

1．C. L. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24 (1968), 182—190.

2．J. A. Goguen, The fuzzy Tychonoff theorem, J. Math. Anal. Appl. 43 (1973), 734—742.

3．W. J. pervin, "Foundations of General Topology", Academic press, New York, (1964).

4．C. K. Wong, Convering properties of fuzzy topological spaces,

J. Math. Anal. Appl. 43 (1973) 697—704.
5. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control 8 (1965) 338—353.

*〔译自J. Math. Anal. Appl. 50. 74—79 (1975)〕

（张肇炽译）

不分明拓扑多重系统中的最优性

R. H. Warren

1. 前　言

Nazzroff 在新近的一篇论文〔2〕中，引进了不分明多重拓扑系统的概念，并且试图揭示了有关该系统的某些结论。如同 Halkin〔1〕的贡献一样，他的工作是向动态多重系统最优控制的不分明拓扑化方面做出的最先努力。本文的目的是对文〔2〕的主要结论进行一下再探讨。

本文一般地沿照文〔2〕的纲目和符号，只偶尔在一些基本概念上回到文〔1，3〕。为了照顾完整性，在第 2 节中包括了不分明集和不分明拓扑空间的基础题材。在第 3 节中，形式化地给出了不分明拓扑多重系统。第 4 节包含事件的可达集和不分明边界的讨论。第 5 节给出了不分明最优控制问题最优解的定义和必要条件的证明。

2. 一 些 准 备

设X是一个集。X中的不分明集A定义为一个序偶的集，$A=\{(x,\mu_A(x)):x\in X\}$，这里$\mu_A(x)$表通过映射$\mu_A: X\to[0,1]$（$[0,1]$是单位闭区间），$x$隶属于$A$的程度。

定义2.1　设A和B是X中分别具有隶属函数$\mu_A(x)$和$\mu_B(x)$的两个不分明集。又，设A^c是A的补集，符号$\vee$和$\wedge$分别表在$[0,1]$中的联合（上确界）和交合（下确界）。于是，对所有$x\in X$，

$$A=B \iff \mu_A(x)=\mu_B(x),$$
$$A\subset B \iff \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),$$
$$A\cup B \iff \mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\vee\mu_B(x),$$
$$A\cap B \iff \mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),$$
$$A^c \iff \mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x),$$
$$x\in A \iff \mu_A(x)\neq 0.$$

定义2.2　若I是一个指标集，且若对任一$i\in I$，A_i是X中的一个不分明集，则对所

有 $x \in X$

$$C = \bigcup_I A_i \iff \mu_C(x) = \bigvee_I \{ \mu_{A_i}(x) \},$$

$$D = \bigcap_I A_i \iff \mu_D(x) = \bigwedge_I \{ \mu_{A_i}(x) \}.$$

显然，空不分明集ϕ和基不分明集X的隶属函数分别是$\mu_\phi(x) = 0$和$\mu_X(x) = 1$。若$\mu_A(x) \in \{0, 1\}$对所有$x \in X$，则不分明集A叫做褶集。

注意，在褶集族和X的子集族之间存在1：1对应。

定义2.3 设E是一个集。不分明拓扑空间是一个偶（E，ε）这里ε是E中不分明集族，合于：

（a） ϕ，$E \in \varepsilon$；

（b） 若A，$B \in \varepsilon$，则$A \cap B \in \varepsilon$；

（c） 若$A_i \in \varepsilon$，对所有$i \in I$，则$\bigcup_I A_i \in \varepsilon$。

ε的元素叫做不分明集。当且仅当，$A^C \in \varepsilon$，A是E中闭不分明集。

定义2.4 设A是不分明拓扑空间（E，ε）中的不分明集。则A的内部，表作$\mathring{A}$，是含于A中的所有开不分明集的并：

$$\mathring{A} = \bigcup \{ G : G \subset A, \text{且} G \in \varepsilon \}.$$

A的闭包，表作$\overline{A}$，是包含A的所有闭不分明集的交：

$$\overline{A} = \bigcap \{ F : F \supset A, \text{且} F^C \in \varepsilon \}.$$

A的外部，表作$\dot{A}$，是含于A^C中的所有开不分明集的并：

$$\dot{A} = \bigcup \{ G : G \subset A^C, \text{且} G \in \varepsilon \}.$$

显然，$\mathring{A}$和$\dot{A} = (\overline{A})^C$都在$\varepsilon$中。

定义2.5 不分明拓扑空间（E，ε）的一个局部拖尾不分明集是一个偶（T，V）合于：

（a） T是E中的不分明集；

（b） V是$\{e : e \in T\}$上可递的，反对称的（即，$a \neq b$且$aVb \Rightarrow b \not V a$）且反自反的（即，$e_1 V e_2 \Rightarrow e_1 \neq e_2$）二元关系；

（c） 若$e \in T$给$G \in \varepsilon$合于：$e \in G$，则存在$\bar{e} \in G \cap T$合于$\bar{e} V e$。

例如，给定不分明拓扑空间（E，ε）的一个不分明集T和T上的一个实值函数f，f在任一$G \cap T$（这里$G \in \varepsilon$）上达不到最小值，我们规定$e_1 V e_2$，当且仅当$f(e_1) < f(e_2)$。于是（T，V）是局部拖尾集。

3．不分明拓扑多重系统

设E是以事件为其元素的一个集。可在E上赋予时间结构，假定$E = X \times R^1$，这里R^1表实直线，又假定有一个E到R^1内的叫做钟的射影映射，表事件的时间。

设r表E上的二元关系，合于：$e_1 r e_2$意为事件e_2后于事件e_1。假定r是可递的，自反的，反对称的和向前的（即，$e_1 r e_2$且$e_1 r e_3 \Rightarrow e_2 r e_3$或$e_3 r e_2$）。若$R$是$E$上这种二元关系的集，则$R$叫做策略集，它的元素叫做策略。

一个不分明拓扑多重系统〔2，P. 481〕是一个三元组合（E，ε，R），这里（E，ε）

是不分明拓扑空间，而R是策略集，合于：对所有e_1，$e_2 \in E$，$A \in \varepsilon$，$r \in R$，具有$e_1 r e_2$且$e_1 \in A$，存在$B \in \varepsilon$，合于：$e_2 \in B$且$B \subset \{e^1 : e r e'$且$e \in A\}$。

一个不分明动态多重系统是一个三元组合（E，ε，R），这里（E，ε，R）是一个不分明拓扑多重系统，合于：对所有e_1，e_2，$e_3 \in E$且r_1，$r_2 \in R$具有$e_1 r_1 e_2$且$e_2 r_2 e_3$，存在$r \in R$具有$e_1 r e_2$且$e_2 r e_3$。在第4节末，我们将就不分明动态多重系统作一附加的假定。

考虑下面的不分明拓扑多重系统但不是不分明动态多重系统的例子。它违反〔2，命题3.1〕。设E是含至少三个元素的集，设$\varepsilon = \{\phi, E\}$，且设$R = \{r_1, r_2\}$，这里$e_1 r_1 e_2$，$e_2 r_2 e_3$，且$r_1$，$r_2$是自反的。

4. 可 达 集 和 边 界

从现在起不加说明讨论的是不分明动态多重系统（E，ε，R）。

设e_1，$e_2 \in E$，且$r \in R$具有$e_1 r e_2$，则集

$$t(e_1, e_2, r) = \{e : e_1 r e\} \cap \{e : e r e_2\}$$

叫做对应于策略r从事件e_1到事件e_2的轨道。

若$e_1 \in E$，则

$$K(e_1) = \{e : e_1 r e \text{对某些} r \in R\}$$

叫做e_1的可达集。若A是E中的不分明集，则

$$K(A) = \bigcup_{e_1 \in A} K(e_1)$$

叫做A的可达集。

注意，$K(e_1)$，$K(A)$和$t(e_1, e_2, r)$都是褶集，且$\{e_1, e_2\} \subset t(e_1, e_2, r) \subset K(e_1)$。

命题4.1 〔2，P. 482〕若$e_1 \in K(e)$，则$K(e_1) \subset K(e)$。

证：倘若错误的〔2，命题3.1〕用一适当的假定，如同我们在定义不分明动态多重系统时所做的那样来代替，则〔2〕中的证明正确。

命题4.2 若e_3，$e_4 \in t(e_1, e_2, r)$，则轨道$t(e_3, e_4, r)$或轨道$t(e_4, e_3, r)$存在，且是$t(e_1, e_2, r)$的子集。

证：首先，e_3，$e_4 \in t(e_1, e_2, r)$蕴含$e_1 r e_3$和$e_1 r e_4$。由于r是向前的，$e_3 r e_4$或$e_4 r e_3$，假定$e_3 r e_4$，由此，轨道$t(e_3, e_4, r)$确定了、若$e \in t(e_3, e_4, r)$，则$e_3 r e$。由于$e_1 r e_3$且r是可递的，得$e_1 r e$。相仿地，$e r e_2$。因此，$e \in t(e_1, e_2, r)$。

如同在〔2〕中，我们将进行讨论不分明集A的不分明边界∂A。〔2〕的明显欠缺是不曾定义∂A。这促使了〔3〕中仔细地研究了∂A和它的性质。

定义4.1 〔3〕设A是不分明拓扑空间（E，ε）中的不分明集。A的不分明边界，表作∂A，定义如下：若$\overline{A} \cap \overline{A^c} = \phi$，则$\partial A = \phi$，否则，$\partial A = \bigcap\{E$中闭不分明集$D$：$\mu_D(x) = \mu_{\overline{A}}(x)$当$x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}\}$。

命题4.3 〔3〕设A是不分明拓扑空间（E，ε）中的不分明集，则

（i）$\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$。

(ii) $\partial A \supset \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

证. (i) 若 $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$ 或 $x \notin \overline{A}$，则 $\mu_{\partial A}(x) = \mu_{\bar{A}}(x)$。若 $x \notin \overline{A} \cap \overline{A^c}$ 且 $x \in \overline{A}$，则 $x \notin \overline{A^c}$。因此，$x \notin \overline{A^c}$ 且 $\mu_A(x) = 1$。由于 $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$，得 $\mu_{\mathring{A}}(x) = 1 = \mu_{\bar{A}}(x)$。

(ii) 若 $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$，则从定义 4.1. 得 $\mu_{\partial A}(x) = \mu_{\bar{A}}(x) \geqslant \mu_{\bar{A}}(x) \wedge \mu_{\overline{A^c}}(x)$。

命题4.4 设 A 是不分明拓扑空间 (E, ε) 中的不分明集，若 $\mu_{\mathring{A}}(e) \neq 1$ 且 $\mu_{\dot{A}}(e) \neq 1$，则 $e \in \partial A$。

证： 只需证明 $e \in \overline{A} \cap \overline{A^c}$ 就够了。由于 $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$ 且 $\mu_{\mathring{A}}(e) \neq 1$，得 $\mu_{\overline{A^c}}(e) \neq 0$，从而 $e \in \overline{A^c}$。由于 $\overline{A} = (\dot{A})^c$ 且 $\mu_{\dot{A}}(e) \neq 1$，得 $\mu_{\bar{A}}(e) \neq 0$，从而 $e \in \overline{A}$。

下面的例子表明，4.4. 的逆命题不真。设 $E = \{e_1, e_2\}$，设 $\mu_A(e_1) = 1$，$\mu_A(e_2) = \frac{1}{2}$ 且 $\varepsilon = \{\phi, E, A\}$。则 $e_1 \in \partial A$ 且 $\mu_{\mathring{A}}(e_1) = 1$。

下一步我们将指出，在任一不分明拓扑空间中，〔2，命题 4．2〕的充分条件成立。由此，〔命题 4．2〕对确定不分明边界中的隶属是无效的。

命题4.5 设 A 是不分明拓扑空间 (E, ε) 中的不分明集，又设 $e \in E$，则 $\mu_{\mathring{A}}(e) \neq 1$ 或 $\mu_{\dot{A}}(e) \neq 1$。

证： 若 $\mathring{A}(e) = 1$，则 $\mu_A(e) = 1$ 且 $\mu_{A^c}(e) = 0$。因此，$\mu_{\dot{A}}(e) = 0$。

下面的例子表明，〔2，命题 4．3〕不真。设 $E = \{e_1, e_2, e_3\}$，$R = \{r\}$，这里 $e_1 r e_2$ 且 r 是自反的，又设 $\varepsilon = \{\phi, E, U, V, W, X, A\}$，这里

	e_1	e_2	e_3
μ_U	0	0	$\frac{1}{2}$
μ_V	1	$\frac{1}{2}$	0
μ_W	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
μ_X	1	0	$\frac{1}{2}$
μ_A	1	0	0

则 (E, ε, R) 是不分明动态多重系统且 $e_1 \in t(e_1, e_2, r)$，但 $e_1 \notin \partial K(A)$。

为了克服这种不具有〔2，命题 4．3〕的有利结果的困难，我们要限制所需考察系统的类型，要求每一不分明动态多重系统适合下面的假定：若 A 是 E 中的不分明集，具有 $e_1 \in A$，$e_1 r e_2$ 且 $e_2 \in \partial K(A)$，则 $t(e_1, e_2, r) \subset \partial K(A)$。

5. 不分明最优控制问题

对不分明动态多重系统（E，ε，R）的不分明控制问题，是一个五元组合（E，ε，R，S，T），这里S和T是E中的不分明集。T叫做目标，且若$e\in T$，则e叫做目标点。例如，考虑操纵一架攻击机对抗一架闪避飞行着的被追逐的飞机，而要找到导弹发射的位置。追击目标当时位置和稍后时间估计位置的包络是一个不分明集，从而是T的λ选者。

不分明控制问题（E，ε，R，S，T）的确是一个三元组合（e_1，e_2，r）合于：$e_1\in S$，$e_2\in T$，$r\in R$且e_1re_2。

对不分明控制问题（E，ε，R，S，T）的不分明最优控制问题，是一个五元组合（E，ε，R，S，(T，V)），这里（T，V）是（E，ε）的一个局部拖尾不分明集。

对不分明最优控制问题（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优解，是不分明控制问题（E，ε，R，S，T）的解（e_1，e_2，r）合于：没有同样不分明控制问题的解（$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$，$\bar{r}$）具有$\bar{e}_2Ve_2$。

若（e_1，e_2，r）是对不分明最优控制问题的一个最优解，则轨道t（e_1，e_2，r）叫做对该不分明最优控制问题的一个最优轨道。

首先，我们指出，若对目标点e_2有一最优解，则对e_2的所有其它解也是最优的。

命题5.1 若（e_1，e_2，r）是对不分明最优控制问题（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优解，$e_3\in S$，$\hat{r}\in R$，且$e_3\hat{r}e_2$，则（e_3，e_2，$\hat{r}$）是对（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优解。

证. 显然，（e_3，e_2，$\hat{r}$）是对不分明控制问题（E，ε，R，S，T）的一个解。假设（e_3，e_2，$\hat{r}$）不是最优解。于是有解（$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$，$\hat{r}$）具有$\bar{e}_2Ve_2$。我们推得（e_1，e_2，r）不是一个最优解。

其次，我们指出，一个最优轨道的某些子集是最优轨道。

命题5.2 若t（e_1，e_2，r）是对不分明最优控制问题（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优轨道，且$e_3\in S\cap t$（e_1，e_2，r），则t（e_3，e_2，r）是对（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优轨道。

证： 由于$e_3\in t$（e_1，e_2，r），得e_3re_2。于是据命题5.1，（e_3，e_2，r）是一个最优解。因此，t（e_3，e_2，r）是一个最优轨道。

最后，我们指出，最优轨道位于S的可达集的不分明边界中。

命题5.3 若（e_1，e_2，r）是不分明最优控制问题（E，ε，R，S，(T，V)）的一个最优解，则t（e_1，e_2，r）$\subset\partial K(S)$。

证： 根据第4节末的假定，若$e_2\in\partial K(S)$，则t（e_1，e_2，r）$\subset\partial K(S)$。剩下要证$e_2\in\partial K(S)$。由构造法，$e_2\in K(S)\subset\overline{K(S)}$。假设$e_2\notin\partial K(S)$，则据命题4.3 (i)，$e_2\in\mathring{K}(s)$。由假定（$T$,$V$）是（$E$,$\varepsilon$）的局部拖尾不分明集，有$e_2\in\mathring{K}(S)\cap T$合于：$\bar{e}_2Ve_2$。特别，$\bar{e}_2\in K(S)$，且有$\bar{e}_1\in S$和$\bar{r}\in R$具有$\bar{e}_1\bar{r}\bar{e}$。因此，（$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$，$\bar{r}$）是给定控制问题的解，具有$\bar{e}_2Ve_2$。这矛盾于解（$e_1$，$e_2$，$r$）的最优性。

参 考 文 献

1. H.Halkin, Topological aspects of optimal of dynamical polysyst—ems, Contrib.Differential Equations 3（1964）, 377—385.
2. G.J.Nazaroff, Fuzzy topological polysystems, J.Math.Anal.Appl.41（1973）478—485.
3. R.H.Warren, Boundary of a fuzzy set, communicated.（译自J.Math.Anal.Appl.54, 309—315（1976）

（张肇炽译）

始与终不分明拓扑与不分明Tychonoff定理

R·LOWEN 著

引 言

本文引入始与终不分明拓扑的概念。在定理1.4同2.4中我们将证明，从范畴的观点看，它们是推广扑拓的正确概念。在定理1.6中，我们将证明，对于我们的不分明紧概念，Tychonoff 的乘积定理是正确的。并且证明，对于弱不分明紧是不成立的。

对于没有定义和证明的概念和结果，请读者参看〔10〕。

1. 始不分明拓扑

假若我们考虑一集E，一不分明拓扑空间（F，γ），和一函数$f:E\to F$，那么我们能够定义

$$f^{-1}(\gamma)=\{f^{-1}(\lambda):\lambda\in\gamma\}.$$

容易看出$f^{-1}(\gamma)$是使得f为不分明连续的最小不分明拓扑。

一般地，考虑不分明拓扑空间族（F_j, γ_j）$_{j\in J}$和对于每一$j\in J$的函数

$$f_j:E\to F_j$$

那么容易看出并

$$\bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j)$$

是使得每一f_j均为不分明连续的E之不分明拓扑的子基.并且，它是具有这个性质的最小不分明拓扑。我们用

$$\langle\bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j)\rangle \quad 或 \quad \sup_{j\in J} f_j^{-1}(\gamma_j)$$

来表示它。

定义1.1　所谓E上对于不分明拓扑空间族$(F_j, \gamma_j)_{j\in J}$及其函数族

$$f_j: E \to (F_j, \gamma_j)$$

的始不分明拓扑，是在E上使得每一函数f_j均不分明连续的最小不分明拓扑。由定义容易检验它类似于普通拓扑的下面结果。

利用定义中的记号，设(G, δ)是一不分明拓扑空间而且f是从G到E的函数。那么f不分明连续的必充条件是所有的合成$f_j \circ f$是不分明连续的。此外，E上的始不分明拓扑是具有这个特性的最小者。显然，对于始拓扑成立的特性对于始不分明拓扑同样成立。

这些断言的证明是十分显然的，留给有兴趣的读者。

当$(F_j, \gamma_j)_{j\in J}$是拓扑生成的不分明拓扑空间族时，我们有下面的问题；$\forall j \in J$，令$\gamma_j = \omega(T_j)$（见[10]），这儿T_j是F_j上的某一拓扑。

那么，一方面我们能考虑被如下定义的

$$\sup_{j\in J} f_j^{-1}(\omega(\mathscr{T}_j)),$$

另一方面，我们又能先考虑始拓扑再考虑被它生成的不分明拓扑，亦即

$$\omega(\sup_{j\in J} f_j^{-1}(\mathscr{T}_j))$$

我们可以证明两种方法给出同一不分明拓扑。

设E是一集而且(F, δ)是某一不分明拓扑空间。

预理1.1　若$f: E \to F, \delta$，那么

$$\iota(f^{-1}(\delta)) = f^{-1}(\iota(\delta)) = \iota(f^{-1}(\overline{\delta})).$$

证明. $f: E, f^{-1}(\iota(\delta)) \to F, \iota(\delta)$是连续的；于是$f: E, \omega(f^{-1}(\iota(\delta))) \to F, \overline{\delta}$是不分明连续的。这便推出$\omega(f^{-1}(\iota(\delta))) \supset f^{-1}(\overline{\delta}) \supset f^{-1}(\delta) \Rightarrow f^{-1}(\iota(\delta)) \supset \iota(f^{-1}(\overline{\delta})) \supset \iota(f^{-1}(\delta))$。此外，$f: E, f^{-1}(\delta) \to F, \delta$是不分明连续的；于是$f: E, \iota(f^{-1}(\delta)) \to F, \iota(\delta)$是连续的，而且这便推出$\iota(f^{-1}(\delta)) \supset f^{-1}(\iota(\delta))$。

预理1.2　设$f: E \to F, \omega(\mathscr{T})$，那么

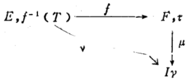
$$\omega(f^{-1}(\mathscr{T})) = f^{-1}(\omega(\mathscr{T})).$$

证明： 从预理1.1和$\delta = \omega(\mathscr{T})$，这便推出$\iota(f^{-1}(\omega(\mathscr{T}))) = f^{-1}(\mathscr{T})$而且于是

$\overline{f^{-1}(\omega(\mathscr{T}))} = \omega(f^{-1}(\mathscr{T})) \Longrightarrow f^{-1}(\omega(\mathscr{T})) \subset \omega(f^{-1}(\mathscr{T}))$为了证明另一包含，只须证明对$\forall \nu \in \omega(f^{-1}(\mathscr{T}))$存在一$\mu \in \omega(\mathscr{T})$使得

$$\nu = f^{-1}(\mu),$$

亦即一$\mu \in \omega(\mathscr{T})$使得下面的图形是交换的。



设 $\nu\in\omega(f^{-1}(\mathscr{T}))$；那么，如果对于 $\forall x,y\in E f(x)=f(y)\Longrightarrow\nu(x)=\nu(y)$ 的话，便存在唯一的因子 μ. 令 $y\in f(E)$ 而且 $x_1\neq x_2\in f^{-1}(y)$. $\forall G\in f^{-1}(\mathscr{T})$ 我们必有 $f^{-1}(y)\subset G$ 或 $f^{-1}(y)\cap G=\phi$.

令 $\nu(x_1)<\alpha<\nu(x_2)$. 因为 $\nu\in\omega(f^{-1}(\mathscr{T}))$，我们有

$$\nu^{-1}(]\alpha,1])\in f^{-1}(\mathscr{T}),$$

而且，因为 $x_2\in f^{-1}(y)\cap\nu^{-1}(]\alpha,1])$，这便推出 $f^{-1}(y)\subset\nu^{-1}(]\alpha,1])$，与 $\nu(x_1)<\alpha$ 矛盾. 于是因子 μ 存在。

此外，为了证明对于 $\tilde{\mu}\in\omega(\mathscr{T})$ 有 $\tilde{\mu}of=f^{-1}(\tilde{\mu})=\nu$ 成立，只须证明下面两件事情：

（a） $\mu/f(\in)\in\omega(\mathscr{T}/f(E))$；

（b） $\forall\xi\in\omega(\mathscr{T}/f(E))$ 存在 $\bar{\xi}\in\omega(\mathscr{T})$ 使得

$$\bar{\xi}/f(E)=\xi.$$

令 $f(E)=F'$ 且 $\mathscr{T}/F'=\mathscr{T}'$，那么

（a） $f:E,\ f^{-1}(\mathscr{T})\to F'$，$\mathscr{T}'$ 是一开满射而且于是，$\forall\alpha\in I$，

$$\mu/F'^{-1}(]\alpha,1])=fo\nu^{-1}(]\alpha,1])\in\mathscr{T}'.$$

于是 $\mu/F'\in\omega(\mathscr{T}')$.

（b） $\xi\in\omega(\mathscr{T}')$，当且仅当 $\mathscr{L}(\xi)=\{(x,r);\ \xi(x)>r\}$ 是在 $F'\times I$ 中的开集，置 $\mathscr{T}'\times\mathscr{U}=\mathscr{T}\times\mathscr{U}/(F'\times I)$，这儿的 $\mathscr{U}$ 表示 I 上的寻常拓扑。于是存在 $\mathscr{L}'\in\mathscr{T}\times\mathscr{U}$ 使得

$$\mathscr{L}(\xi)=\mathscr{L}'\cap(F'\times I).$$

现在置 $\mathscr{L}'_x=\{r:(x,r)\in\mathscr{L}'\}$ 和

$$\tilde{\xi}:F\to I$$

$$x\to\sup_{r\in\mathscr{L}'_x} r$$

置 $\mathscr{L}''=\{(x,r):\exists r'\in\mathscr{L}'_x\ r<r'\}$，那么显然有

$$\tilde{\xi}(x)=\sup_{r\in\mathscr{L}'_x} r=\sup_{r\in\mathscr{L}'_x} r \quad 和\ \tilde{\xi}/F'=\xi.$$

剩下来只须证明 $\mathscr{L}(\tilde{\xi})=\mathscr{L}''$ 和 $\mathscr{L}''\in\mathscr{T}\times\mathscr{U}$. 首先我们有 $(x,r_0)\in\mathscr{L}(\tilde{\xi})\Longleftrightarrow\tilde{\xi}(x)>r_0\Longleftrightarrow\sup_{r\in\mathscr{L}'_x} r>r_0\Longleftrightarrow\exists r_1\in\mathscr{L}'_x r_1>r_0\Longleftrightarrow(x,r_0)\in\mathscr{L}''$. 第二，假若 $(x,r)\in\mathscr{L}''$ 那么存在 $(x,r_0)\in\mathscr{L}'$ 且 $r_0>r$. 由于 $\mathscr{L}'$ 是一开集因而存在 $G_0\in\mathscr{T}$ 和 $\alpha_0,\beta_0\in I$ 使得

$$(x,r_0)\in G_0\times]\alpha_0,\beta_0[\subset\mathscr{L}'.$$

那么显然

$$(x,r)\in G_0\times[0,\beta_0[\subset\mathscr{L}'',$$

而且于是 $\mathscr{L}''$ 是一开集。这证明我们能和开拓 $\mu|f(E)$ 为一函数 $\tilde{\mu}\in\omega(\mathscr{T})$，而且

$$\nu=\tilde{\mu}of=f^{-1}(\tilde{\mu})\in f^{-1}(\omega(\mathscr{T})).$$

这便证明了 $f^{-1}(\omega(T))$ 同 $\omega(f^{-1}(\mathscr{T}))$ 相等.

预理1.3 若 E 是一集；$(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ 是在 E 上的一族拓扑，那么

$$\sup_{j\in J}\omega(\mathscr{T}_j)=\omega(\sup_{j\in J}\mathscr{T}_j).$$

证明. $\forall_i\in J$，我们有$\omega(\mathscr{T}_i)\subset\omega(\sup_{j\in J}\mathscr{T}_j)$；从此显然推出$\sup_{j\in J}\omega(\mathscr{T}_j)\subset\omega(\sup_{j\in J}\mathscr{T}_j)$。为了证明其逆，令

$$\mu\in\omega(\sup_{j\in J}\mathscr{T}_j)\Longleftrightarrow\forall\alpha\in I,\ \mu^{-1}(]\alpha,1])\in\sup\mathscr{T}_j. \tag{1}$$

为了使计算容易一些，让我们约定令$\Phi=2^{(\bigcup_{j\in J}\mathscr{T}_j)}$，即$\bigcup_{j\in J}\mathscr{T}_j$的所有有限子集的集。那么(1)等价于命题：对$\forall\alpha\in I$存在$\phi_\alpha\subset\Phi$使得

$$\mu^{-1}(]\alpha,1])=\bigcup_{\varphi\in\phi_\alpha}\ \bigcap_{G\in\varphi}G$$

现在对$\forall\alpha\in I$令

$$\nu^\alpha=\sup_{\varphi\in\phi_\alpha}\ \inf_{G\in\varphi}\alpha\chi_G.$$

那么显然对$\forall\alpha\in I$，$\nu^\alpha\in\sup_{j\in J}\omega(\mathscr{T}_j)$而且因为$\mu=\sup_{\alpha\in I}\nu^\alpha$,我们也有$\mu\in\sup_{j\in J}\omega(\mathscr{T}_j)$

联合预理1.2和1.3便有

定理1.4 设E是一集，$(F_j,\mathscr{T}_j)_{j\in J}$是一族拓扑空间，而且$f_j:E\to F_j$是一族函数，那么我们有

$$\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\omega(\mathscr{T}_j))=\omega(\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\mathscr{T}_j)).$$

证明： 由预理1.2及1.3可直接推得。

现在我们来考察集E及其一族不分明拓扑空间$(F_j,\delta_j)_{j\in J}$和一族函数

$$f_j:E\to F_j$$

于是，一方面我们能够考虑由给定拓扑所联结的始不分明拓扑，即

$$\iota(\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\delta_j)).$$

另一方面，我们又能够考虑由拓扑空间族$(F_j,\iota(\delta_j))_{j\in J}$所确定的始拓扑，即

$$\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\iota(\delta_j)).$$

容易证明，这两个拓扑是相等的。

定理1.5 假若E是一个集，$(F_j,\delta_j)_{j\in J}$是一不分明拓扑空间族，而且$f_j:E\to F_j$是一函数族，那么我们有

$$\iota(\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\delta_j))=\sup_{j\in J}f_j^{-1}(\iota(\delta_j)).$$

证明： 由预理1.1可以推出

$$\forall j\in J, f_j^{-1}(\iota(\delta_j))=\iota f_j^{-1}(\delta_j).$$

因而其定理可类似于定理1.3而证明。

Goguen在[6]中证明了任意个拟——不分明紧空间的积不必是拟——不分明紧的（见[10]）。同时，他又证明了对有限积的特性是成立的。然而，对我们定义的不分明紧将可以证明其Tychonoff定理成立。

定义1.2 假若$(E_j,\delta_j)_{j\in J}$是一族不分明拓扑空间，那么在$\Pi_{j\in J}E_j$上的不分明乘积拓

扑，被定义为在$\Pi_{j\in J}E_j$上关于空间族$(E_j, \delta_j)_{j\in J}$和函数族$f_i: \Pi_{j\in J}E_j \to E_i$的始不分明拓扑，且对$\forall i\in J$；$f_i = pr_i$是在第$i$个坐标上的投影。我们用$\Pi_{j\in J}\delta_j$表示这个不分明拓扑。

定理1.6 如果$(E_j, \delta_j)_{j\in J}$是一族不分明紧的不分明拓扑空间，那么乘积空间$(\Pi_{j\in J}E_j, \Pi_{j\in J}\delta_j)$也是不分明紧的。

证明：从[10，定理4.6]可知，要证该定理，只需证明，对于

$$\sigma = \{ pr_j^{-1}(\nu): j\in J,\ \nu\in\delta_j \}$$

中存在α, ϵ，$\alpha > \epsilon > 0$使的对于$\forall \beta_0 \in 2^{(\beta)}$均有

$$\sup \nu_0 \ngeq \alpha - \epsilon$$

的任意族β，$\sup_{\nu\in\beta}\nu \ngeq \alpha$。

设β是如此的一个族，那么对$\forall j\in J$令

$$\beta_j = \{ \nu\in\delta_j : pr_j^{-1}(\nu)\in\beta \}$$

那么对$\forall(\beta_j)_0 \in 2^{(\beta_j)}$；我们有$\{ pr_j^{-1}(\nu): \nu\in(\beta_j)_0 \} \in 2^{(\beta)}$，于是存在$z\in\Pi_{j\in J}E_j$使得

$$\sup_{\nu\in(\beta_j)_0} pr_j^{-1}(\nu)(z) < \alpha - \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\nu\in(\beta_j)_0} \nu(z_j) < \alpha - \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{\nu\in(\beta_j)_0} \nu(z_j) < (\alpha - (\epsilon/2)) - (\epsilon/2).$$

因为上边的不等式对所有的$(\beta_j)_0 \in 2^{(\beta_j)}$成立，从$(E_j, \delta_j)$的不分明紧性可以推出，存在$x_j\in E_j$使得

$$\sup_{\nu\in(\beta_j)_0} \nu(x_j) < \alpha - (\epsilon/2).$$

这个不等式对于每一个$j\in J$都是成立的，而且如果令$x = (x_j)_{j\in J}$我们有

$$\sup_{\nu\in\beta} \nu(x) = \sup_{j\in J} \sup_{\nu\in\beta\cap pr_j^{-1}(\delta_j)} \nu(x)$$

$$= \sup_{j\in J} \sup_{\mu\in\beta_j} pr_j^{-1}(\mu)(x)$$

$$= \sup_{j\in J} \sup_{\mu\in\beta_j} \mu(x_j) \leq \alpha - (\epsilon/2) < \alpha.$$

下面的定理说明，弱不分明紧（见[10]）仅对有限乘积是成立的。

定理1.7 假若$(E_j, \delta_j)_{j=1,\cdots,n}$是有限个弱不分明紧的不分明拓扑空间，那么乘积空间$(\Pi^n_1 E_j, \Pi^n_1 \delta_j)$是弱不分明紧的。

证明：从〔10，定理4.7〕，只需证明，在

$$\sigma = \{ pr_j^{-1}(\nu): j = 1, \cdots, n,\ \nu\in\delta_j \}$$

中存在$\epsilon > 0$，使得对$\forall\beta_0 \in 2^{(\beta)}\ \sup_{\nu\in\beta_0}\nu \ngeq 1-\epsilon$的任意族$\beta$，均有$\sup_{\nu\in\beta}\nu \neq 1$。

设β是如此的一个族，那么对$\forall j = 1, \cdots 1^n$，令

$$\beta_j = \{ \nu\in\delta_j : pr_j^{-1}(\nu)\in\beta \}$$

那么$\forall(\beta_j)_0 \in 2^{(\beta_j)}$；我们有

$$\{ pr_j^{-1}(\nu) : \nu\in(\beta_j)_0 \} \in 2^{(\beta)},$$

而且$\exists z\in\Pi_1^n E_j$使得

$$\sup_{\nu\in(\beta j)_0} p\gamma_j^{-1}(\nu)(z)<1-e$$

$$\sup_{\nu\in(\beta j)_0} \nu(z_j)<1-e$$

于是存在 $x_j\in E_j$ 使得 $\sup_{\mu\in\beta_j}\mu(x_j)<1$。

令 $x=(x_1\cdots, x_n)$；那么我们有

$$\sup_{\nu\in\beta}\nu(x)=\sup_{j=1,\cdots,n}\ \sup_{\nu\in\beta\cap pr_j^{-1}(\delta_j)}\nu(x)$$

$$=\sup_{j=1,\cdots,n}\ \sup_{\mu\beta_j} pr_j^{-1}(\mu)(x)$$

$$=\sup_{j=1,\cdots,n}\ \sup_{\mu\in\beta_j}\mu(x_j)<1.$$

下面我们给出一个反例，证明任意个弱不分明紧空间的乘积不必是弱不分明紧的。

反例。$\forall n\in N$令

$$I_n=I$$

而且

$$\delta_n=\{\alpha:\alpha\text{是常数}\}\cup\{(1-(1/n))\chi_A: A\subset I\}.$$

那么显然，$\forall n\in N$，(I_n, δ_n)是弱不分明紧的。

$$\prod_N\delta_n=<\{p\gamma_n^{-1}(1-(1/n))x_A: A\subset I,\ n\in N\}\cup\{\alpha:\alpha\text{常数}\}.>$$

现在，对 $x\in I$,

$$p\gamma_n^{-1}(1-(1/n))\,x_x(y)=1-(1/n)\qquad\text{若}\quad y_n=x$$
$$=0\qquad\text{若}\,y_n\neq x,$$

于是 $\sup_{n\in N,\ x\in I}p\gamma_n^{-1}(1-(1/n))\,x_x=1$。现在令 $n_1,\cdots,n_K\in N$，且 $x_1,\cdots,x_K\in I$；取

$$y\in\prod_N I_n\quad\begin{cases}y_{n_1}\neq x_1\\ \vdots\\ y_{n_K}\neq x_k\end{cases}$$

那么

$$\sup pr_{n_j}^{-1}(1-(1/n_i))x_{x_j}(y)=0$$

这便证明，对于取的 $e>0$，不存在有限子集，使其在$\Pi_N I_n$的所有点上，其上确界能够达到$1-e$。于是$(\Pi_N I_n,\ \Pi_N\delta_n)$不是弱不分明紧的。

2. 终不分明拓扑

考虑集F，不分明拓扑空间$(E,\ \delta)$，函数$f: E\to F$；我们能够定义

$$f(\delta)=<\{\nu: f^{-1}(\nu)\in\delta\}>.$$

容易看出$f(\delta)$是使f成为不分明连续的最小的不分明拓扑。

更一般地，考虑不分明拓扑空间族$(E_j,\delta_j)_{j\in J}$和对每一$j\in J$，函数$f_j: E_j\to F$.容易看出交

$$\bigcap_{j\in J} f_j(\delta_j)$$

是在F上使得所有f_i均为不分明连续的最小不分明拓扑。

定义2.1 所谓F上对不分明拓扑空间族$(E_j,\delta_j)_{j\in J}$和不分明函数族

$$f_j:(E_j,\delta_j)\to F$$

的终不分明拓扑空间，是指对于每一函数f_j均不分明连续的最小不分明拓扑。

象始不分明拓扑的情况一样，我们有以下的结果。

设(G,δ)是一不分明拓扑空间，而且f是从F到G的函数；那么f不分明连续的必充条件是所有的合成$f\cdot f_j$是不分明连续的。因而F上的终不分明拓扑是具有这个性质的最小拓扑。

终拓扑的传递特性对于终不分明拓扑也是成立的。

这些断言的证明都是很简单的。

类似于始不分明拓扑的问题一样，我们也有下面的问题。假设记法如定义中的一样，而且$\forall j\in J$；令$\delta_j=\omega(\mathscr{T}_j)$，那么，一方面有

$$\bigcap_{j\in J} f_j(\omega(\mathscr{T}_j))$$

另一方面又有

$$\omega(\bigcap f_j(\mathscr{T}_j)).$$

我们能重新证明这两个不分明拓扑是相同的。

预理2.1 设$f:E,\delta\to F$那么我们有

$$\iota(f(\bar{\delta}))=f(\iota(\delta))\supset\iota(f(\delta)).$$

证明. 可象预理1.1一样证明其包含$\iota(f(\bar{\delta}))\supset f(\iota(\delta))\supset\iota(f(\delta))$. 另外的包含可利用$\bar{\delta}$而证明，亦即

$$\iota(f(\bar{\delta}))\subset f(\iota(\bar{\delta}))=f(\iota o\omega(\iota(\delta)))=f(\iota(\delta)).$$

预理2.2 假若$f:E,\ \omega(\mathscr{T})\to F$，那么我们有

$$f(\omega(\mathscr{T}))=\omega(f(\mathscr{T})).$$

证明. 从预理2.1可知对$\delta=\omega(\mathscr{T})$便有

$$\overline{f(\omega(\mathscr{T}))}=\omega(f(\mathscr{T})).$$

然而，$f(\omega(\mathscr{T}))$是生成拓扑、并且它确为使$f:E,\ \omega(\mathscr{T})\to F$，$f(\omega(\mathscr{T}))$不分明连续的最小不分明拓扑。但是因为$\omega(\mathscr{T})$是生成拓扑，$f:E,\ \omega(\mathscr{T})\to F$，$\overline{f(\omega(\mathscr{T}))}$仍然是不分明连续的（见[10，命题3.1]），于是　$f(\omega(\mathscr{T}))=\overline{f(\omega(\mathscr{T}))}$.

预理2.3 设E是一集且$(\mathscr{U}_j)_{j\in J}$是在E上的拓扑族，那么

$$\bigcap_{j\in J}\omega\,\mathscr{U}(_j)=\omega(\bigcap_{j\in J}\mathscr{U}_j).$$

证明: $v\in\omega(\bigcap_{j\in J}\mathscr{U}_j)\Longleftrightarrow v$对于$E$上的$\bigcap_{j\in J}\mathscr{U}_j$和$I_r$是连续的$\Longleftrightarrow v$对$E$上的$\mathscr{U}_j(\forall j\in J)$和$I_r$是连续的$\Longleftrightarrow v\in\bigcap_{j\in J}\omega(\mathscr{U}_j)$.

定理2.4 设F是一集，$(E_j,\ \mathscr{T}_j)_{j\in J}$是一拓扑空间族，而$f_j:F_j\to F$是函数族，那么

$$\bigcap_{j\in J} f_j(\omega(\mathscr{T}_j)) = \omega(\bigcap_{j\in J} f_j(\mathscr{T}_j))$$

证明：从预理2.2和2.3可得

对于终不分明拓扑没有类似于定理1.5关于始不分明拓扑的结果。容易看到，假若$(F_j, \gamma_j)_{j\in J}$是一不分明拓扑空间族，而且假若$f_j: F_j \to F$是某一函数族，我们有

$$\iota(\bigcap_{j\in J} f_j(\gamma_j)) \subset \bigcap f_j(\iota(\gamma_j)).$$

下面的反例说明上式不能再精确了。

反例.（a）设E是一抽象集，具有不分明拓扑

$$\gamma_1 = \{\nu: \nu(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in E\} \cup \{\alpha: \alpha \text{常数} < \frac{1}{2}\}.$$

$$\gamma_2 = \{\nu: \nu(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in E\} \cup \{\alpha: \alpha \text{常数} > \frac{1}{2}\}.$$

那么$\iota(\gamma_1) = \iota(\gamma_2) = 2^E$，但是$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\alpha: \alpha \text{常数}\}$而且于是$\nu(\gamma_1 \cap \gamma_2) = \{\phi, E\}$.
亦即

$$\iota(\gamma_1 \cap \gamma_2) \subsetneqq \iota(\gamma_1) \cap \iota(\gamma_2).$$

（b）．令$E = I$，$F = \{p, q\}$．而且定义一函数f如下：

$$f(x) = p \qquad \text{若} \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$f(x) = q \qquad \text{若} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1].$$

置$\delta = \{\nu_{\alpha,\beta}: \alpha、\beta \in I, \ \alpha \leq \beta\}$这儿

$$\begin{aligned} \nu_{\alpha,\beta}(x) &= \alpha && \text{假若} \quad x \leq \alpha \\ &= x && \text{假若} \quad \alpha \leq x \leq \beta \\ &= \beta && \text{假若} \quad \beta \leq x. \end{aligned}$$

那么容易看出$\iota(\delta) = \{]\alpha, 1]: \alpha \in I\} \cup \{I\}$、而且于是$f(\iota(\delta)) = \{\phi, \{q\}, F\}$.

一方面，假若$\mu \in f(\delta)$，那么存在α，β，$\alpha \leq \beta$使得$\mu \cdot f = \nu_{\alpha,\beta}$。但是其因子，仅当对所有的$x, y$，由$f(x) = f(y)$可推出$\nu_{\alpha,\beta}(x) = \nu_{\alpha,\beta}(y)$时才存在。

这便推出$\nu_{\alpha,\beta}|]\frac{1}{2}, 1[$同$\nu_{\alpha,\beta}|[0, \frac{1}{2}]$两者都是常数，而这只有在$\nu_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}$才可能。于是显然$\mu = \frac{1}{2}$．这便意味着$f(\delta)$是始拓扑而且$\iota(f(\delta)) = \{F, \phi\}$，它比$f(\iota(\delta))$更小。

参 考 文 献

1．G·BIRKHOFF，“Lattice Theory” AMS Colloquium, Vol. 25. 1967.

2．J. G. BROWN, A note on fuzzy sets, Information and Control 18 (1971), 32—39.

3. C·L·CHANG, Fuzzy topological spaces, J·Math·Anal·Appl. 24 (1968) 182—190·

4. A·DE Luca AND S·TERMINI, Algebraic properties of fuzzy Sets, J·Math·Anal·Appl. 40 (1972), 373—386·

5. J·GOGUEN, L—fuzzy Sets, J·Math·Anal·Appl. 18 (1967), 145—174

6. J·GOGUEN, Fuzzy Tychonoff theorem, J·Mah·Anal·Appl. 43 (1973), 734—742

7. J·L·KELLEY, "General Topology". Van Nostrand princeton N·J·1955

8. R·LOWEN, Topologies floues,C·R·Acad·Sci·Paris. 278 (1974)

9. R·LOWEN, Convergence floue, C·R·Acad·Sci. Paris 280 (1975)

10. R·LOWEN, Initial and Final Fuzzy topologies and the Fuzzy Tychon-off Theorem, J·Math·Anal·Appl. 58 (1977), 11—21.

11. M·C·THORNTON, Topological Spaces and lattices of I.s.c functi-ons, Trans.Amer.Math.Soc. 181 (1973)

12. R·H·WARREN, Continuity of mappings of fuzzy topological Spaces, Notices Amer. Math.Soc. 21. No.4(1974)

13. C·K·WONG, Covering properties of Fuzzy topological spaces. J·Math·Anal·Appl. 43 (1973), 697—704

14. C·K·WONG, Fuzzy topology, product and quotient theorems,J·Math·Anal·Appl. 45 (1974), 512—521

15. C·K·WONG. Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, Res-earch report IBM 1973, J·Math·Appl. 46 (1974), 316—328

16. L·A·Zadeh, Fuzzy Sets. Information and Control 8 (1965) 338—353.

17. L·A·ZADEH, Probability measures on fuzzy eveuts, J·Math·Anal·Ap-pl. 10 (1968)

（本文译自 J·Math·Anal·Appl. 58 (1971) 11—21）

（蒲义书译）

不分明拓扑空间和不分明紧性

R·LOWEN 著

本文的目的是较为深刻的研究不分明拓扑空间的结构。为此，我们修改了至今被使用的不分明拓扑的定义。我们引入了两个函子$\tilde{\omega}$和$\tilde{\iota}$，它使我们能够更清楚地看出不分明拓扑空间与拓扑空间之间的联系。最后，我们对拓扑学中的紧性概念进行了推广，引入了不分明紧

的概念，并证明了一些与现在已经得到的结果具有相反的结论。Tychnoff的乘积定理被推广到不分明紧的情况。

1．不分明拓扑空间

设E是一集，I是单位区间。

C•L•Chang在〔3〕中定义集E上的不分明拓扑是一子集$\delta\subset I^E$，使得

（i）　0，$1\in\delta$，

（ii）　$\forall\mu,\ \nu\in\delta \Longrightarrow \mu\wedge\nu\in\delta$，

（iii）　$\forall(\mu_j)_{j\in J}\subset\delta \Longrightarrow \sup_{j\in J}\mu_j\in\delta$。

许多文章都是以这个定义为主题的。其中最重要的有〔3，6，11—14〕。

虽然采用Chang的定义，获得了许多重要结果（这可以从我们以前发表的文章〔8与9〕看出），我们仍然要提出一个变形而又更为自然的定义。这就是将条件（i）。即：0，$1\in\delta$修改为（i）′，$\forall\alpha$常函数，$\alpha\in\delta$。有许多理由可以说明为什么要选择后者。

直观上很显然，为了理论的一般化，需要作这样的修改。但从数学的角度看，还有许多更为重要的理由。事实上，

（1）　从2中关于ω的定义立刻看出，每一用拓扑生成的不分明拓扑总是满足条件(i)′。

（2）　容易看出，利用Chang的定义，不分明拓扑之间的常函数不必是连续的。而采用修改后的定义，在一般情况下总是正确的。这自然是需要修改定义的最重要之点。

（3）　4段中关于不分明紧的定义，也提出需要修改定义的问题。

基于以上原因，我们现在提出

定义1.1　$\delta\subset I^E$是在集E上的不分明拓扑，当且仅当

（i）$\forall\alpha$常函数，$\alpha\in\delta$，

（ii）$\forall\mu,\ \nu\in\delta \Longrightarrow \mu\wedge\nu\in\delta$，

（iii）$\forall(\mu_i)_{j\in J}\subset\delta \Longrightarrow \sup_{j\in J}\mu_i\in\delta$。

这个不分明拓扑的概念，在后面将到处使用。Chang定义的不分明拓扑我们称为拟不分明拓扑。

δ中的不分明集称作开不分明集。不分明集$\mu\in I^E$称做闭的，当且仅当μ^c是开的。不分明集$\mu\in I^E$的闭包和内部分别被定义为

$$\bar{\mu}=\inf\{\nu:\nu\geqslant\mu,\ \nu^c\in\delta\},$$

$$\mathring{\mu}=\sup\{\nu:\nu\leqslant\mu,\ \nu\in\delta\}.$$

容易看出，$\bar{\mu}$是比μ大的最小闭集．而$\mathring{\mu}$是比μ小的最大开集。

定义1.2　一个算子$\psi: I^E\to I^E$是一不分明闭包算子，当且仅当

（i）　$\psi(\alpha)=\alpha$，$\forall\alpha$常函数

（ii）　$\psi(\mu)\geqslant\mu$，$\forall\mu\in I^E$，

（iii）　$\psi(\mu)\vee\psi(\nu)=\psi(\mu\vee\nu)$，$\forall\mu,\ \nu\in I^E$

（iv）$\psi(\psi(\mu))=\psi(\mu)$　　$\forall\mu\in I^E$。

不分明内部算子被对偶地定义，亦即：一个算子$\phi: I^E\to I^E$是一不分明内部算子，当且

仅当

(i) $\phi(\alpha)=\alpha$, $\forall\alpha$常函数

(ii) $\phi(\mu)\leqslant\mu$, $\forall\mu\in I^E$,

(iii) $\phi(\mu)\wedge\phi(\nu)=\phi(\mu\wedge\nu)$, $\forall\mu$, $\nu\in I^E$

(iv) $\phi(\phi(\mu))=\phi(\mu)$ $\forall\mu\in I^E$.

容易看出算子$^-$与$^\circ$分别相应于不分明闭包算子和不分明内部算子。于是，每一不分明拓扑相连于一不分明闭包算子（对应地，不分明内部算子），反过来给定一不分明闭包算子（对应地不分明内部算子），可以用下面的办法联结一不分明拓扑。设ψ是不分明闭包算子（对应地，θ为不分明内部算子），那么相联的不分明拓扑被给定为

$\delta(\psi)=\{\mu^c:\psi(\mu)=\mu\}$，（对应地，$\delta(\theta)=\{\mu:\theta(\mu)=\mu\}$）。

容易看出这个联系在下述意义下是自反的，与不分明拓扑δ的$^-$（对应地$^\circ$）相联的不分明拓扑就是δ自身，同时与某闭包算子（对应地，不分明内部算子）确定的不分明拓扑的不分明闭包算子（对应地，不分明内部算子）就是ψ（对应地θ）自己。

定义1.3 一个子集$\sigma\subset\delta$，是对于δ的基，这儿的δ是在集E上的不分明拓扑，当且仅当

$$\forall\mu\in\delta,\ \exists(\mu_i)_{i\in J}\subset\sigma,\ 使\mu=\sup_{i\in J}\mu_i$$

定义1.4 一个子集$\sigma'\subset\delta$是对于δ的子基，当且仅当σ'的成员的有限下界族是对于δ的基。

2. 函 数 ω 和 ι

给定一个拓扑可用很自然的办法去联结一不分明拓扑，反过来也一样。令$\mathscr{T}(E)$为E上所有拓扑的集，而$\mathscr{W}(E)$为所有不分明拓扑的集。关于R我们考虑拓扑$\mathscr{T}_r=\{]\alpha,\infty[;\alpha\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi\}$。由该拓扑所得的$I$的诱导拓扑被表示为$I_r$.

下面我们来定义两个映射

$$\iota:\mathscr{W}(E)\longrightarrow\mathscr{T}(E):\delta\rightarrow\iota(\delta)$$

这儿$\iota(\delta)$是在E上对于“函数族”δ和拓扑空间I_r的始拓扑。

$$\omega:\mathscr{T}(E)\longrightarrow\mathscr{W}(E):\mathscr{T}\longrightarrow\omega(\mathscr{T})$$

这儿$\omega(\mathscr{T})=\mathscr{C}(E,I_r)$是从$(E,\mathscr{T})$到$I_r$的连续函数。

容易验证$\omega(\mathscr{T})$确为一不分明拓扑，因为它是从$(E,\mathscr{T})$到单位区间关于寻常拓扑的下半连续函数。

若$\delta\in W(E)$等于对某个$\mathscr{T}\in\mathscr{T}(E)$的$\omega(\mathscr{T})$，我们说$\delta$是拓扑生成的。

命题2.1

(i) $\iota o\omega=id_{\mathscr{T}(E)}$

(ii) ι同ω分别是保序满函数和保序单函数，

(iii) $\omega o\,\iota(\delta)$是包含δ的最小拓扑生成的不分明拓扑。我们将它表示为$\overline{\delta}$，

(iv) δ是拓扑生成的，当且仅当$\delta=\overline{\delta}$.

证明：这是很明显的。

定理2.2　(E,δ)是拓扑生成的，当且仅当对于每一连续函数$f\in\mathscr{C}(I_r, I_r)$和每一$\nu\in\delta$　也有$f\circ\nu\in\delta$。

证明：必要部分是显然的。假设　$\mu\in\overline{\delta}$．因为对于$\iota(\delta)$的一个基是被假定为有限交族

$$\bigcap_{i=1}^{n}\nu_i^{-1}(\,]e_i,\ 1\,]\,),\quad \nu_i\in\delta,\ e_i\in I;$$

这等价于说对于$\forall e\in I$，$\forall x\in\mu^{-1}(\,]e,\ 1\,]\,)\exists$一有限集$I_{e,x}$使得

$$x\in\bigcap_{i\in I_{e,x}}\nu_i^{-1}(\,]e_i,\ 1\,]\,)\subset\mu^{-1}(\,]e,\ 1\,]\,).$$

现在固定x而且令$\mu(x)=k_x$那么$\forall e<k_x$，那么存在$\exists$一有限集I_{ex}使得

$$x\in\bigcap_{i\in I\epsilon}\nu_i^{-1}(\,]e_i,\ 1\,]\,)\subset\mu^{-1}(\,]e,\ 1\,]\,).$$

那么对于$\forall\in<k_x$和$\forall_i\in I_\epsilon$ 令

$$\mu_{i,\epsilon}=\in_x\,]e_i,\ 1\,]\circ\nu_i,$$

使有$\mu_{i,\epsilon}\in\delta$而且显然

$$\mu_{i,\epsilon}(y)=e\iff\nu_i(y)>e_i$$
$$=0\iff\nu_i(y)\leqslant e_i.$$

令$\nu_\epsilon{}^x=\inf_{i\in I_\epsilon}\mu_{i,\epsilon}\in\delta$，那么显然也有

$$\nu_\epsilon{}^x(y)=\in\iff\nu_i(y)>e_i,\ \forall_i\in I_\epsilon$$
$$=0\iff\exists_j\in I_\epsilon,\quad \nu_j(y)\leqslant e_j$$

于是$\nu_e{}^x(y)=e\Rightarrow\mu(y)>e$且$\forall e<kx$，$\nu_\epsilon{}^x\leqslant\mu$。现在容易看到

$$\mu=\sup_{x\in E}\sup_{\epsilon<k_x}\nu_\epsilon{}^x\in\delta.$$

3．不　分　明　连　续

设(E,δ)同(F,γ)是不分明拓扑空间而f是从E到F的函数。Chang 在〔3〕中定义f为不分明连续，当且仅当

$$\forall\nu\in\gamma,\quad f^{-1}(\nu)\in\delta.$$

并证明它等价于

$$\forall\nu\in I^E,\ \nu^c\in\gamma\quad f^{-1}(\nu)^c\in\delta.$$

应该注意，当我们使用不分明拓扑空间的修改定义时，毫不影响这个结果。事实上，〔3和9〕关于这个概念的所有结果都仍然是正确的。

定义3.1　我们说函数

$$f: E,\ \delta\longrightarrow F,\ \gamma$$

是连续的，当且仅当$f: E,\ \iota(\delta)\longrightarrow F,\ \iota(\gamma)$是连续的。

命题3.1　对于函数$g: E,\ \delta\longrightarrow F,\ \gamma$，考虑下面的特性：

（i）　g是不分明连续的

（ii）　g是连续的

(iii) $g: E, \overline{\delta} \longrightarrow F, \overline{\gamma}$是不分明连续的

(iv) $g: E, \overline{\delta} \longrightarrow F, \gamma$是不分明连续的

那么(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv)。

证明：是明显的，

现在让我们将从(E, δ)到(F, γ)的所有连续函数的集表示为$\mathscr{C}_0(E, F)$，从(E, δ)到(F, γ)的所有不分明连续函数的集表示为$\mathscr{C}_0(E, F)$，那么我们有

推论3.2　若δ是拓扑生成的，那么

$$\mathscr{C}(E, F) = \mathscr{C}_0(E, F)$$

证明：从3.1易得，

这个推论的逆不正确，其证明如下：

反例．设$E = I$而F是任意的。令δ是E上的不分明拓扑，具有子基

$$\{\alpha : \alpha\text{是常量函数}\} \cup \{\text{恒等函数}\}$$

而且令γ是在F上的离散不分明拓扑，亦即$\gamma = I^F$。

显然$\iota(\gamma)$是离散的，而且容易验证，$\iota(\delta)$是连通的。于是我们有

$$\mathscr{C}(E, F) = \{\text{从}E\text{到}F\text{的常函数}\}$$

从命题3.1可以推出，常有$\mathscr{C}_0(E, F) \subset \mathscr{C}(E, F)$而且因为常函数是不分明连续的我们有$\mathscr{C}_0(E,F) = \mathscr{C}(E,y)$然而因为$\iota(\delta) = \mathscr{T}_{r/I}$，$\delta$不是拓扑生成的且$\mathscr{C}(I_r, I_r)$是一个比$\delta$更大的类。

现在可以考虑不分明拓扑空间与不分明连续映射的范畴及其拓扑空间与连续映射的范畴。容易看出，被定义在2中的两个函数ω和ι导出这些范畴间的两个协变函子。实际上，令$\mathscr{C}$表示拓扑空间的范畴而$\mathscr{F}$表示不分明拓扑空间的范畴，令

$$\tilde{\omega} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{F}$$

由$\tilde{\omega}(E, \mathscr{T}) = (E, \omega(\mathscr{T}))$和$\tilde{\omega}(f) = f$定义，且

$$\tau : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}$$

由$i(E, \delta) = (E, \tau(\delta))$和$i(f) = f$定义。

此外，从推论3．2可直接推出$\tilde{\omega}(\mathscr{C})$是$\mathscr{F}$的全子范畴。

4．不　分　明　紧

Chang在〔3〕中对于不分明拓扑空间给出了一类似于拓扑空间中紧的定义。这个定义也被使用在〔6〕和〔2〕，然而，使用这个定义时，当$(X, \mathscr{T})$是紧空间时，$(X, \omega(\mathscr{T}))$不一定紧。其不成立的事实，可看下面的反例。

反例．设$(X, \mathscr{T})$是单位区间I同寻常的拓扑．那么对$\forall x \in I$，$x \neq 0$，$x \neq 1$，令v_x是被如下定义的不分明集

$$v_x(x) = 1$$

$$v_x(y) = 0, \ \forall y \in \left[0, \frac{x}{2}\right] \cup \left[\frac{1+x}{2}, 1\right],$$

ν_x在$\left[\dfrac{x}{2},\ x\right]$和$\left[x,\ \dfrac{1+x}{2}\right]$上是直线。

对于

$$x=0 \quad 令\nu_0(y)=-y+1 \quad \forall y\in I,$$
$$x=1 \quad 令\nu_1(y)=y \quad \forall y\in I.$$

那么显然对$\forall x\in I$，$\nu_x\in\omega(\mathscr{T})$，且

$$\sup_{x\in I}\nu_x=1$$

但任何有限子族不具有该性质。

因此在这里，我们引入紧性的另一形式，我们相信它是较好的一个。

令（E，δ）是一不分明拓扑（或拟不分明拓扑）空间。

定义4.1.一不分明$\nu\in I^E$是不分明紧的，当且仅当对于所有的族

$$\beta\subset\delta\ (使得\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\nu)$$

同所有的$\varepsilon>0$，存在有限子族$\beta_0\subset\beta$使得

$$\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant\nu-\varepsilon.$$

利用不分明紧不分明集的这个概念我们有

定义4.2 不分明拓扑（或拟不分明拓扑）空间（E，δ）是不分明紧的，当且仅当在（E，δ）中的每一个常不分明集是不分明紧的。

在进一步讨论以前，让我们先来比较一下这个定义同〔3，6或12〕中的定义。我们指出，对于Chang的紧性定义我们将仅在拟不分明拓扑空间类中称为拟不分明紧。事实上，没有不分明拓扑空间能够是拟不分明紧的。因此，当我们使用拟不分明紧的概念时，总是限制在拟不分明拓扑空间类中。否则，所有的结果都是显然的。

现在仅有的关系是，若（F，δ）是拟不分明紧空间，那么常不分明集1_E是不分明紧的，这最后的特性是我们在〔8，9〕中业已引进的概念。为了将它同定义4.2区别开来，现在我们引进

定义4.3. 不分明拓扑（或拟不分明拓扑）空间（E，δ）是弱不分明紧的，当且仅当1_E是不分明紧的。

因而，若（E，δ）是拟不分明紧的，那么它是弱不分明紧的。

从现在起，除特别声明外，所有空间均是按照定义1.1的不分明拓扑空间。

定理4.1. 不分明拓扑空间（E，$\omega(\mathscr{T})$）是不分明紧的，当且仅当空间（E，$\mathscr{T}$）是紧的。

证明： 设$\beta\subset\omega(\mathscr{T})$使得$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha>0$且$\in$使得$\alpha>\varepsilon>0$.

$$\forall_\mu\in\beta，令\mu^\varepsilon=\mu+\varepsilon，且[0,\alpha]=I_\alpha.$$

那么$\forall_\mu\in\beta$，$\mathscr{L}(\mu^\varepsilon)=\{(x,r)\ :\mu^\varepsilon(x)>r\}$是在$E\times R$中的开集且$\bigcup_{\mu\in\beta}\mathscr{L}(\mu^\varepsilon)\supset E\times I_\alpha$.

因为$E\times I_\alpha$是紧的，存在一有限子族$\beta_0\subset\beta$使得

$$\bigcup_{\mu\in\beta_0}\mathscr{L}(\mu^\varepsilon)\supset E\times I_\alpha 而且显然 \sup_{\beta\in\beta_0}\mu\geqslant\alpha-\varepsilon$$

反过来，设$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$是$E$之开复盖，那么

$$\sup_{A\in\beta} x_A = 1$$

这儿x_A是A之特征函数。

选取 $e\in]0,1[$,那么从（$E,\omega(\mathscr{T})$）的不分明紧性可知，存在一有限子集$\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$使得

$$\sup_{A\in\beta} x_A \geqslant 1-e$$

显然$\mathscr{B}_0$是$\mathscr{B}$之有限子复盖。

从这个证明（或者看〔8〕）容易看出，假若我们用弱不分明紧代替不分明紧，同一结果仍然成立。

Chang 在〔3〕中证明了，若f是从（E,δ）到（F,Υ）的满不分明连续函数，而且（E,δ）是拟不分明紧的，那么（F,Υ）也是拟不分明紧的。对于不分明紧性上述事实同样成立，而且我们可证更一般的结果。

命题4.2. 若f:（E,δ）$\longrightarrow$（F,Υ）是不分明连续的，而且ν是不分明紧不分明集，那么$f(\nu)$是在（F,Υ）中的不分明紧集。

证明. 设$\beta\subset\Upsilon$是使得

$$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant f(\nu)$$

那么容易证明（$f^{-1}(\mu))_{\mu\in\beta}$满足

$$\sup_{\mu\in\beta} f^{-1}(\mu)\geqslant\nu$$

因为（$f^{-1}(\mu)$）$_{\mu\in\beta}\subset\delta$而且$\nu$是不分明紧的，这便推出对于任意$e>0$存在一有限子族$\beta_0\subset\beta$使得

$$\sup_{\mu\in\beta_0} f^{-1}(\mu)\geqslant\nu-e$$

现在立刻有

$$\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant f(\nu)-e$$

由于假若f是到上的，F上的每一常不分明集是E上具有同一值的常不分明集在f下的象，我们便有下面的推论。

推论4.3 假若（E,δ）是不分明紧的，而且f是从（E,δ）到（F,Υ）上的连续映射，那么（F,Υ）是不分明紧的。

证明. 显然

在建立另一重要结果之前，我们来证明一值得注意的关于不分明紧的等价条件。

命题4.4 （E,δ）是不分明紧的，当且仅当对于$\forall\beta\subset\delta$和$\forall\alpha>0$ ($\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$) 及其$\forall k>1$存在一有限子族$\beta_0\subset\beta$使得

$$\sup_{\mu\in\beta_0} k\mu\geqslant\alpha$$

证明: 若（E,δ）是满足定理条件且$\beta\subset\delta$使得$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$且$e>0$，那么$k=\alpha/(\alpha-e)$ 即是所要的。

当（E,δ）是不分明紧的且$\beta\subset\delta$是使得$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$同时$k>1$，那么$e=\alpha-\alpha/k$即是所要求的。

对于弱不分明紧的类似准则也成立，假若我们将每一α代以1．

若（E，δ）是不分明紧空间，对于每一闭不分明集不必是不分明紧的。在定理4．6和4．7之后我们将给出这个及其另一些现象的反例，但是首先我们来证明

命题4.5 假若（E，δ）是拓扑生成的不分明紧空间（亦即存在一紧拓扑$\mathscr{T}$使得$\delta=\omega(\mathscr{T})$，那么每一闭不分明集是不分明紧的。

证明：考虑α，$\alpha^c\in\omega(\mathscr{T})$而且$\beta\subset\omega(\mathscr{T})$使得$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$．

因为$1-\alpha\in\omega(\mathscr{T})$我们有

$\mathscr{U}(\alpha)=\{(x,r):\alpha(x)<r\}$是在$E\times I$中的开集，于是$\mathscr{U}(\alpha)^c$是紧集。现在选取$\epsilon>0$而且继续令

$$\mu^{\epsilon}=\mu+\epsilon$$

显然$\bigcup_{\mu\in\beta}\mathscr{L}(\mu^{\epsilon})\supset\mathscr{U}(\alpha)^c$，于是存在一有限子集$\beta_0\subset\beta$使得

$$\bigcup_{\mu\in\beta_0}\mathscr{L}(\mu^{\epsilon})\supset\mathscr{U}(\alpha)^C$$

而且显然也有$\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant\alpha-\epsilon$。

下面的定理是Alexander的子基引理的不分明形式．它在研究不分明紧空间的乘积及其一些反例中是有用的。

定理4.6 （E，δ）是不分明紧的，当且仅当对于δ的任一子基σ，任一$\beta\subset\sigma$及其使得$\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$的每一$\alpha>\epsilon>0$，存在一有限子集$\beta_0\subset\beta$使得

$$\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant\alpha-\epsilon.$$

证明：仅当部分是显然的；令σ是对于δ的一个子基．显然（E，δ）是不分明紧的，当且仅当对$\forall\beta\subset\delta$存在$-\alpha>\epsilon>0$使得

$$\forall\beta_0\in 2^{(\beta)}\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\ngeqslant\alpha-\epsilon$$

这便推出

$$\sup_{\mu\in\beta}\mu\ngeqslant\alpha.$$

置

$$\mathscr{C}=\{\beta\subset\delta:\forall\beta_0\in 2^{(\beta)}\sup_{\mu\in\beta_0}\mu\ngeqslant\alpha-\epsilon\}.$$

显然$\mathscr{C}$是具有有限特征的，于是由Tukey引理可以推出，对于每一族$\beta\in\mathscr{C}$存在一极大族$\widetilde{\beta}\in\mathscr{C}$包含$\beta$。

现在容易证明，假若$\mu\in\widetilde{\beta}$使得

$\gamma_1,\cdots,\gamma_n\in\delta$且$\mu\geqslant\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n\Rightarrow\exists k,\ \gamma_k\in\widetilde{\beta}$．令$\beta\in\mathscr{C}$那么存在一在$\mathscr{C}$中的极大族$\widetilde{\beta}$包含$\beta$．

考虑$\widetilde{\beta}\cap\sigma$．显然从定理的假设便有

$$\sup\widetilde{\beta}\cap\sigma\ngeqslant\alpha.$$

我们将证明 $\sup\widetilde{\beta}\leqslant\sup\widetilde{\beta}\cap б$.

$\forall\mu\in\widetilde{\beta}$和$\forall x\in E$，使得$\mu(x)>0$及$\forall a>0$，$a<\mu(x)$，$\exists \nu_1^*,\cdots,\nu_n^*\in б$使得

$\nu_1^*\wedge\cdots\wedge\nu_n^*\leqslant\mu$ 和 $\nu_1^*(x)\wedge\cdots\wedge\nu_n^*(x)>\mu(x)-a$。因为 $\mu\in\widetilde{\beta}$ 和 $\widetilde{\beta}$ 的极大性便有

$\nu_k^*\in\widetilde{\beta}$.

于是 $\forall a>0$，$\exists\nu_k^*$，$\nu_k^*(x)>\mu(x)-a$ 和 $\nu_k^*\in\widetilde{\beta}\cap б$.

现在固定x. 那么$\forall\mu\in\widetilde{\beta}$，$\mu(x)>0$和$\forall a>0$，$a<\mu(x)$，便存在$\nu^*\in\widetilde{\beta}\cap б$使得 $\nu^*(x)$

$>\mu(x)-a\Rightarrow\forall\mu\in\widetilde{\beta}$

$\sup(\widetilde{\beta}\cap б)(x)\geqslant\mu(x)\Rightarrow\sup\widetilde{\beta}\cap б\geqslant\sup\widetilde{\beta}$. 这便推出 $\sup\widetilde{\beta}\ngeq\alpha$，从而$\beta\ngeq\alpha$.
于是（E，δ）是不分明紧的。

一个十分类似的结果，对于弱不分明紧空间也是成立的，而且可以证明弱不分明紧对于任意乘积不再成立，然而，在我们即将发表的文章中将证明，对于有限个乘积都是成立的。

定理4.7.（E，δ）是弱不分紧的必充条件是，对于δ的任一子基б，及其对于 $\beta\subset б$（$\sup_{\mu\in\beta}\mu=1$）和所有的 $e>0$ 均存在一有限子集$\beta_0\subset\beta$使得

$$\sup_{\mu\in\beta_0}\geqslant 1-e.$$

证明：类似于定理4.6.

现在让我们来看反例。

反　　例

显然若（E，ι(δ)）是紧的（E，δ）是不分明紧. 其逆是不必成立的. 为了说明不成立，令$E=I$而且设δ是具有子基

{α：α常数}∪{$\nu\in I^E$：$\nu(x)=x$ 或O，$\forall x\in E$}∪{χ_0}的不分明拓扑，这儿χ_0是在0上的 Dirac 函数。

容易看出（E，δ）是不分明紧的，但ι(δ)是离散的。

这同时证明了不分明紧不分明拓扑空间的连续像不必是不分明紧的。到此为止，考察了（E，δ）不分明紧而（E，$\hat{\delta}$）不是不分明紧的情况，且

$$id:\ (E,\ \delta)\longrightarrow(E,\overline{\delta}).$$

现在我们来证明，在命题4.5之前曾经提到的事实，尽管（E，δ）是不分明紧的，而且μ在E中是闭的，但μ不必是不分明紧的。

令$E=I$而且令δ是具有子基

$$\{\alpha:\alpha\text{常数}\}\cup\{\mu_n:n\in N\}\cup\{\mu,\mu^c\}$$

的拓扑，这里

$$\forall n\in N \quad \mu_n(X)=\frac{1}{3}, \quad \forall x\in\left[0,\ \frac{1}{2}-1/n+1\right]\cup\left[\frac{1}{2}+1/n+1,\ 1\right]$$

$$=0 \quad 在其他地方;$$

$$\mu_n(X)=\frac{1}{3}, \quad \forall x\neq\frac{1}{2},$$

$$=0 \quad x=\frac{1}{2}.$$

那么利用定理4.6容易验证（E，δ）是不分明紧的。可是μ是闭的且

$$\sup_{n\in N}\mu_n=\mu$$

但对任意的$\in>0$，$\in<\frac{1}{3}$没有（μ_n）$_{n\in N}$的有限子族复盖（$\mu-e$）$\vee 0$。

参 考 文 献

1. G·BIRKHOFF, "Lattice Theory". Vol. XXV. AMS Colloquium publications, R. I 1967.
2. J·G·BROWN, A note on fuzzy Sets, Information and Control 18 (1971)·
3. C·L·CHANG, Fuzzy topological spaces, J·Math·Anal·Appl·24 (1968)
4. A·DE LUCA AND TERMINI, Algebraic properties of fuzzy sets. J·Math·Anal·Appl·40 (1972).
5. J·GOGUEN, L—fuzzy sets, J·Math·Anal·Appl. 18 (1967)
6. J·GOGUEN, Fuzzy Tychonoff theorem, J·Math·Anal·Appl·48(1973)·
7. KEUEY, "General Topology", Van Nostrand, New, york, 1955.
8. R·LOWEN, "Topology Floues" C·R·Acad·sci·paris 278 (1974)
9. R·LOWEN, Convergecee Floue, C·R·Acad, sci·parls 280 (1975)
10. M·C·THORNTON, Topological spaces and lattices of I·s·c. functions, Trans·Amer·Math·soc, 181 (1973)
11. R·H·WARREN, Continuity of mappings of fuzzy topological spaces, Notices of the A·M·S. 21 (1974)
12. C·K·WONG, Covering properties of fuzzy topological spaces, J·Math·Anal. Appl. 43 (1973)
13. C·K·WONG, Fuzzy topology, product and quotient theorems Research report IBM 1972, J·Math·Anal·Appl· (1974)
14. C·K·WONG, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology, (Research report IBM 1973), J·Math·Anal·Appl· (1974)

15. L·A·ZADEH, Fuzzy sets, Information and coutrol 8 (1965)
16. L·A·ZADEH·probability measures of fuzzy events, J·Math·Anal·Appl·10 (1968)

〔本文译自 JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 56, 621—633 (1976)〕

（蒲义书译）

不分明向量空间和不分明拓扑向量空间

A·K·KATSARAS 与 D·B·LIU 著

1. 引　言

不分明集的概念被 Zadeh 所引入〔11〕，另一些作者将不分明集应用到各种不同的数学分支中。本文将不分明集的概念应用到向量空间和拓扑向量空间的初等理论。我们使用〔11〕中的概念和术语。对于不分明拓扑空间、不分明积和商空间，我们引用Wong〔9,10〕和Chang〔2〕中的定义。

2. 不分明集的和与标量积

本文始终用 E 表示 K 上的向量空间，这儿的 K 是实或复数系。

定义： 设 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 是 E 中的不分明集，我们定义 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 为 E^n 中的不分明集 A，其隶属度函数被给定为：

$$\mu_A(x_1, x_2\cdots x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \cdots\cdots, \mu_{A_n}(x_n)\}.$$

设 f：$E^n \longrightarrow E$，$f(x_1, {}_2\cdots x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，我们定义：$A_1 + \cdots + A_n = f(A)$.

对于标量 λ 和 E 中的不分明集 B，我们定义 $\lambda B = g(B)$，这里 $g: E \longrightarrow E$，$g(x) = \lambda x$.

预理 2.1　(a) 对于 $\lambda \neq 0$，$\mu_{\lambda B}(x) = \mu_B((1/\lambda)x)$ 对于所有 $x \in E$. 对于 $\lambda = 0$，

$$\mu_{\lambda B}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0. \\ \sup\limits_{y} \mu_B(y) & x = 0 \end{cases}$$

(b). 对于所有标量 λ 和所有 $x \in E$ 我们有：

$$\mu_{\lambda B}(x) \geqslant \mu_B(x).$$

命题 2.2　设 E，F 是 K 上的向量空间，而且 f 是从 E 到 F 的线性映射，那么，对于 E 中所有的不分明集 A，B 和所有的标量 λ，

(a)　$f(A+B) = f(A) + f(B)$;

(b) $f(\lambda A)=\lambda f(A)$。

证明：(a)，令$M=\{f(x):x\subseteq E\}$而且$w\in F$，我们希望证明$a=b$，这里$a=\mu_{f(A+B)}(w)$，$b=\mu_{f(A)+f(B)}(w)$。首先假设$w\notin M$，那么$a=0$，同时，假若，x，$y\in F$，具有$x+y=w$，那么，x,y中至少有一个不在M中，于是$\min\{\mu_{f(A)}(x),\ \mu_{f(B)}(y)\}=0$，这便推出，对于$w\notin M$，我们有$b=0=a$。其次假设$w\in M$，给定$\varepsilon>0$，存在$z\in E$，具有：$f(z)=w$，使得$\mu_{A+B}(z)>a-\varepsilon$，因此存在$x,y\in E$具有$x+y=z$，使得

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}>a-\varepsilon.$$

因为　$f(x)+f(y)=w$，我们有

$$b\geqslant\min\{\mu_{f(A)}(f(x)),\ \mu_{f(B)}(f(y))\}$$
$$\geqslant\min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}>a-\varepsilon.$$

因为$\varepsilon>0$是任意的，便有$b\geqslant a$，另一方面，给定$\varepsilon>0$，在F中存在z_1，z_2，具有$z_1+z_2=w$，使得

$$b-\in<\min\{\mu_{f(A)}(x_1)\mu_{f(B)}(x_2)\}$$

取$\varepsilon<b$(若$b=0$，那么$a=0$)，便有$Z_1,Z_2\varepsilon M$，因此在E中存在x_1,x_2，具有$f1x_1=Z_1$和$f1x_2)=Z_2$，使得

$$b-\in<\min\{\mu_A(x_1),\ \mu_B(x_2)\}$$

因为$f(x_1+x_2)=w$，我们可取$a>b-\varepsilon$因此由$\varepsilon>0$的任意性，便有$a\geqslant b$。
(a)被证明。

(b)令$w\in F$，$c=\mu_{\lambda f(A)}(w)$，$d=\mu_{f(\lambda A)}(w)$。假若$w\notin\mu$，那么$c=d=0$。假设$w\in\mu$。假若$\lambda\neq 0$，

$$c=\mu_{f(A)}(1/\lambda w)=\sup_{f(x)=(1/\lambda)w}\mu_A(x)=\sup_{f(\lambda x)=w}\mu_{\lambda A}(\lambda x)$$
$$=\sup_{f(y)=w}\mu_{\lambda A}(y)=d.$$

其次假度$\lambda=0$，假若$w\neq 0$，那么$c=0$，也有$d=\sup\limits_{f(x)=w}\mu_{OA}(x)=0$

因为，当$f(x)=w\neq 0$，$x\neq 0$。对于$w=0$，我们有：

$$c=\sup_{x\in F}\mu_{f(A)}(x)=\sup_{y\in F}\mu_A(y);$$
$$d=\sup_{f(x)=0}\mu_{OA}(x)=\mu_{OA}(x)=\sup_{y\in E}\mu_A(y).$$

这便完成了证明。

推论2.3　$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$，对于$E$中所有不分明集$A,B$和所有的标量$\lambda$。

我们省去下面容易看出的预理的证明。

预理2.4　设$A_1,\cdots\cdots A_n,B_1,\cdots\cdots,B_m$是$E$中的不分明集，而且取$A=A_1+\cdots+A_n$，$B=B_1+\cdots+B_m$，

$$F=A_1+\cdots+A_n+B_1+\cdots+B_m，\text{那么：}F=A+B.$$

E之寻常子集A可以考虑为隶属度函数等于A之特征函数的不分明集。按照这个办法我们可以考虑形如$A+B$的和，这里A,B中的一个(或两个)是E之寻常子集。对于$x\in E$和不分明集B，我们定义$x+B=\{x\}+B$。

令$f_x:E\to E$，$f_x(y)=x+y$，容易证明下面的预理。

预理2.5　令A是E之寻常子集，且B是不分明集那么

(i)　$x+B=f_x(B)$;

(ii) $\mu_{x+B}(z)=\mu_B(z-x)$;

(iii) $A+B=\bigcup_{x\in A}(x+B)$.

命题2.6 令$A, A_1\cdots A_n$是在E中的不分明集，而$\lambda_1\cdots\lambda_n$是标量，下面的命题是等价的。

(1) $\lambda_1 A_1+\cdots+\lambda_n A_n\subset A$.

(2) 对E中的所有$x_1,\cdots x_n$，我们有

$\mu_A(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n)\geqslant\min\{\mu_{A1}(x)\cdots\cdots\mu_{An}(x_n)\}$.

证明：(1)⇒(2)。

$\mu_A(a_1x_1+\cdots+\lambda_n x_n)\geqslant\mu_{\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_nA_n}(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\min\{\mu_{\lambda_1A_1}(\lambda_1x_1)$
$\cdots\cdots\mu_{\lambda_nA_n}(\lambda_nx_n)\}\geqslant\min\{\mu_{A_1}(x_1)\cdots\mu_{A_n}(x_{A_n})\}$

(2)⇒(1)我们可以假设$\lambda_i\neq0$对于$i=1,\cdots k$和$\lambda_i=0$。对于$k<i\leqslant n$，因为不然的话，可将顺序重新排列。令$x_1,\cdots,x_K$是E中的元素，对于E中所有的$y_1\cdots y_{n-K}$我们有

$\mu_A(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_Kx_K)\geqslant\min\{\mu_{A_1}(x_1)\cdots\mu_{A_K}(x_R,\ \mu_{A_{K+1}}(y_1)\cdots\mu_{A_n}(y_{n-K})\}$

因为$\mu_{OA_j}(0)=\sup_{y\in E}\mu_{A_j}(y)$，我们得到

$\mu_A(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_Kx_K)\geqslant\min\{\mu_{A_1}(x_1)\cdots\mu_{A_K}(x_R),\ \mu_{OA_{K+1}}(0),\cdots,\mu_{OA_n}(0)\}$.

现在

$$\mu_{\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_mA_n}(z)=\sup_{x_1+x_2+\cdots+x_K=z}[\min\{\mu_{\lambda_1A_1}(x_1)\cdots\mu_{\lambda_nA_n}(x_n)\}$$

$$=\sup_{x_1+x_2+\cdots+x_K=z}[\min\{\mu_{\lambda_1A_1}(x_1)\cdots\mu_{\lambda_KA_K}(x_K),\ \mu_{OA_{K+1}}(0)\cdots,\ \mu_{OA_n}(0)\}]$$

$$=\sup_{x_1+\cdots+x_K=z}[\min\{\mu_{A_1}((1/\lambda_1)x_1)\cdots\mu_{A_K}((1/\lambda_K)x_K),\ \mu_{OA_{K+1}}(0)\cdots\cdots,\ \mu_{OA_n}(0)\}].$$

$$\leqslant\sup_{x_1+x_2+\cdots+x_K=z}\mu_A(\lambda_1(1/\lambda_1)x_1+\cdots+\lambda_K(1/\lambda_K)x_K)=\mu_A(z).$$

预理2.7 令A, B是E的不分明子集，那么

(1) $A+OB\subset A$;

(2) $A+OB=A$的充分必要条件是：$\sup_{x\in E}\mu_A(x)\leqslant\sup_{x\in E}\mu_B(x)$

证明：(1) $\mu_A(x+Oy)=\mu_A(x)\geqslant\min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$，因此从命题2.6可推出(1)

(2) 假设$\sup\mu_A(x)\leqslant\sup\mu_B(x)=\mu_{OB}(0)$那么

$$\mu_{A+OB}(z)=\sup_{x+y=z}[\min\{\mu_A(x),\ \mu_{OB}(y)\}]$$
$$=\min\{\mu_A(z),\ \mu_{OB}(0)\}=\mu_A(z).$$

另一方面，假若对某个z，$\mu_A(z)>\sup\mu_B(x)=\mu_{OB}(0)$那么：$\mu_{A+OB}(z)=\min\{\mu_A(z),\ \mu_{OB}(0)\}<\mu_A(z)$。因此 $A+OB\neq A$.

3. 不分明子空间

定义. E中的不分集F称为不分明子空间，假若

〈i〉$F+F\subset F$

〈ii〉$\lambda F\subset F$　对于每一标量 λ

预理3.1　令F是在E中的不分明集，下面的命题是等价的。

〈1〉F是E的子空间；

〈2〉对于所有的标量k，m我们有$F+mF\subset F$；

〈3〉对于所有标量 k,m 和所有 $x,y\in E$我们有

$$\mu_F(kx+my)\geqslant\min\{\mu_F(x),\ \mu_F(y)\}$$

证明：显然〈1〉⇒〈2〉。由(2.6)〈2〉与〈3〉是等价的。

〈2〉⇒〈1〉。$F+F=1F+1F\subset F$

$$kF=kF+OF\subset F.$$

命题3.2　令E同F是K上的向量空间，而且令f是从E到F的线性映射。若A是E的不分明子空间，那么$f(A)$是F的一不分明子空间，类似地。当B是F的不分明子空间时，$f^{-1}(B)$是E的不分明子空间。

证明：对于标量 k,m,我们有

$$kf(A)+mf(A)=f(kA+mA)\subset f(A)$$

这便证明了$f(A)$是F之不分明子空间，同时

$$\begin{aligned}\mu_{f^{-1}(B)}(kx+my)&=\mu_B(f(kx+my))=\mu_B(kf(x)+mf(y))\\&\geqslant\min\{\mu_B(f(x)),\ \mu_B(f(y))\}\\&=\min\{\mu_{f^{-1}(B)}(x),\mu_{f^{-1}(B)}(y)\}\end{aligned}$$

因此，由3.1 $f^{-1}(B)$是一不分明子空间。

我们省去下面容易建立之命题的证明。

命题3.3　若A、B是E之不分明子空间，k是标量，那么$A+B$同kA是不分明子空间。

命题3.4　若$\{A_i\}_{i\in I}$是E之不分明子空间族，那么$A=\bigcap A_i$是一不分明不空间。

证明：

$$\begin{aligned}\mu_A(mx+ky)&=\inf\mu_A(mx+ky)\\&\geqslant\inf_{i\in I}[\min\{\mu_{A_i}(x),\mu_{A_i}(y)\}]\\&\geqslant\min\{\inf_{i\in I}\mu_{A_i}(x),\ \inf_{i\in I}\mu_{A_i}(y)\}\\&=\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}\end{aligned}$$

因此由3.1可推出结果。

4．凸、平衡及其吸收不分明集

定义：E中的不分明集A称为

(a)凸的。假若对于所有的 $k\in[0,1]$有

$$kA+(1-k)A\subset A$$

(b)平衡的。假若对 $|k|\leqslant 1$的所有标量k均有$kA\subset A$；

(c)吸收的。假若$E=\bigcup_{k>0}kA$。

我们省去下面两个容易建立之命题的证明。

命题4.1 设A是E中之不分明集，下面的断语是等价的。

〈1〉A是凸的（平衡的）

〈2〉对于所有$x, y \in E$和所有的$k \in [0,1]$均有

$\mu_A(kx+(1-k)x) \geqslant \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$（对所有$|k|<1$的$k$，$\mu_A(kx) \geqslant \mu_A(x)$）。

〈3〉对于每一$d \in [0,1]$ 寻常集

$A_d = \{x \in E : \mu_A(x) \geqslant d\}$。

是凸的（平衡的）。

命题4.2 对于E之不分明集A。下面的命题是等价的。

〈1〉A是吸收的。

〈2〉对于每一$x \in E$、$\sup_{k>0} \mu_A(kx) = 1$。

〈3〉对于每一d（$0 \leqslant d \leqslant 1$）寻常集

$A_d = \{x \in E、\mu_A(x) \geqslant d\}$

是吸收的。

命题4.3 设E、F是K上的向量空间，而且令$f: E \to F$是一线性映射，假若A是E中之凸（平衡）不分明集，那么$f(A)$是F中之不分明凸（平衡于）不分明集，类似地，当B是F中之凸（平衡）不分明集，那么$f^{-1}(B)$是凸（平衡）不分明集。

证明：我们只对凸不分明的情况给以证明。对于平衡不分明集的证明是类似的，设$k \in [0,1]$且A是在E中之不分明集。那么

$$kf(A)+(1-k)f(A) = f(kA+(1-k)A) \subset f(A).$$

这便证明$f(A)$是凸的，其次，假设B是F中的不分明集，且$k \in [0,1]$。规定

$$M = kf^{-1}(B)+(1-k)f^{-1}(B).$$

那么

$$f(M) = kf(f^{-1}(B)) + (1-k)f(f^{-1}(B)) \subset kB+(1-k)B \subset B.$$

而且，因此$M \subset f^{-1}(B)$

也容易证明下面的命题

命题4.4 令$f: E \to F$是一线性映射，而显A是在F中的吸收集，那么$f^{-1}(A)$是在E中吸收不分明集

利用2.3可以得到下面的命题：

命题4.5 假若A、B是在集E中的凸（平衡）不分明集，那么$A+B$是在E中的凸(平衡)不分明集。

命题4.6 若$\{A_i\}_{i \in I}$ 是在E中的凸（平衡）不分明集，那么$A = \bigcap A_i$是在集中的凸（平衡）不分明集。

证明：令$0 \leqslant d \leqslant 1$那么

$$\{x \in E : \mu_A(x) \geqslant d\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \mu_{A_i}(x) \geqslant d\}.$$

因为E中寻常的凸（平衡）子集的支是凸（平衡），从4.1可得结果。

定义。令A是在E中的不分明集。A的凸（平衡）壳是E中包含A的所有凸（平衡）集之交。

由4.6 A之凸（平衡）壳是E中包含A之最小凸（平衡）不分明集。

命题4.7 令A是在E中之不分明集。那么A平衡壳是不分明集 $\bigcup_{|\lambda| \leqslant 1} \lambda A$

证明： 容易看出不分明集$B=\bigcup_{|\lambda|\leqslant 1}\lambda A$被包含在任一包含$A$之平衡不分明集中，因为$B\supset A$，只须证明$B$是平衡的就行了。令$a\in K$，$|a|\leqslant 1$，而且$x\in E$那么

$$\mu_B(x)=\sup_{|\lambda|\leqslant 1}\mu_{\lambda A}(x)\leqslant\sup_{|\lambda|\leqslant 1}\mu_{a\lambda A}(ax)\leqslant\sup_{|\lambda|\leqslant 1}\mu_{\lambda A}(ax)=\mu_B(ax)$$

因此由2.6 $aB\subset B$。

命题4.8 设A是E之不分明子集，那么A之凸壳co(A)是集

$$B=\bigcup\{\lambda_1A+\cdots+\lambda_nA:\lambda_i\geqslant 0,\ \Sigma\lambda_i=1\}$$

证明： 显然$A\subset B\subset$co(A)、当证明了B是凸的之后，就完成了证明．为此，我们首先注意到$\lambda(\bigcup A_i)=\Sigma\lambda A_i$ 而且

$$(\bigcup_{\lambda\in I}A_i)+\bigcup_{j\in J}B_j\subset\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i+B_j)$$

现在令$a\in[0,1]$ $\sum_1^n\lambda i=1$，$\sum_{j=1}^m k_j=1$，$\lambda_i\geqslant 0$，$k_j\geqslant 0$，那么

$$a\left(\sum_1^n\lambda_iA\right)+(1-a)\left(\sum_{j=1}^m k_jA\right)$$

$$=a\lambda_1A+\cdots+a\lambda_nA+(1-a)k_1A+\cdots+(1-a)k_mA\subset B$$

因为$\sum_1^n a\lambda_i+\sum_{j=1}^m(1-a)kj=1$，这便证明$aB+(1-a)B\subset B$，便完成了证明。

定义． 一不分明集A是绝对凸的，假若它既是凸的又是平衡的．E中一不分明集B之凸平衡壳是E中包含B之所有绝对凸不分明集之交。

容易证明下面的命题

命题4.9 令A是E中之一不分明集．下面的命题是等价的，

〈1〉A是绝对凸的

〈2〉对于所有$|a|+|b|\leqslant 1$的标量a、b

$$aA+bA\subset A$$

〈3〉$\mu_A(ax+by)\geqslant\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}$对于所有$x,y\in E$和所有$|a|+|b|\leqslant 1$的标量$a$、$b$、

〈4〉对于每一$d\in[0,1]$寻常集

$$A_d=\{x\in E:\mu_A(x)\geqslant d\}$$

是绝对凸的。

利用类似于4.5中的证明，可以得到下面的命题

命题4.10 不分明集A之凸平衡壳是不分明集

$$\bigcup(\lambda_1A+\cdots+\lambda_nA:\Sigma|\lambda_i|\leqslant 1).$$

5．商空间

预理5.1 令F是E中一不分明子空间，那么：

〈1〉$\mu_F(x)\leqslant\mu_F(0)$对所有$x\in E$

〈2〉寻常集

$$F_0=\{x\in E:\mu_F(x)=\mu_F(0)\}.$$

是E之寻常子空间．

证明： 〈1〉$OF\subset F$．于是由2.6

$$\mu_F(0)=\mu_F(0x)\geqslant\mu_F(x)$$

对所有$x\in E$。

〈2〉令a，b是标量而且令$x,y\in F_0$，那么

$$\mu_F(ax+by)\geqslant\min\{\mu_F(x),\ \mu_F(y)\}=\mu_F(0).$$

因此由(1)$ax+by\in F_0$。

定义. 对于E之子空间F，我们定义商空间E/F是寻常的商空间E/F_0。

对于$x\in E$，我们用$\hat{x}$表示包含x的E/F的元素。令$q=q_F$表示商映射。

命题5.2 若A是在E中之不分明集，那么 $q^{-1}(q(A))=F_0+A$。

证明: 令$B=q^{-1}(q(A))$。那么，对于每一$z\in E$，$\mu_B(z)=\mu_{q(A)}(\hat{z})=\sup\limits_{x\in\hat{x}}$

$$\mu_A(x)=\sup_{y\in F_0}\mu_A(z-y)=\sup_{y\in F_0}\mu_{y+A}(z)=\mu_{F_0+A}(z)$$

6. 不分明拓扑向量空间

定义. 不分明拓扑向量空间是不分明拓扑的向量空间E，使得两个映射

$$(a)\ \phi:\ E\times E\to E$$
$$(x,y)\to x+y$$
$$(b)\ \psi:\ K\times E\to E$$
$$(\lambda,x)\to\lambda x$$

是连续的，当K具有寻常拓扑而且$E\times E$，$K\times E$是给定的积不分明拓扑时。

定义. 向量空间E上的不分明拓扑τ称为是平移不变的，假若对于所有的$x\in E$和$A\in\tau$均有$x+A\in\tau$。

预理6.1 若E上安有平移不变拓扑，那么每一映射$f_x:E\to E$，$y\to x+y$是同胚。

设E是一分明拓扑向量空间而且F是一不分明子空间。令$q:E\to E|F$表示关于E/F之商不分明拓扑的商映射。

命题6.2 若E的拓扑是平移不变的，那么q是一开映射.

证明: 设V在E中是开的而且$A=q(V)$。为了证明$q^{-1}(A)$在E/F中是开的，只需证明$q^{-1}(A)$在E中是开的。但由于5.2，

$$q^{-1}(A)=F_0+V=\bigcup_{x\in F_0}(x+V)$$

因此$q^{-1}(A)$作为不分明开集的并是开的。

预理6.3 设X_1,Y_1,X_2,Y_2是不分明拓扑空间而且

$$f_1:X_1\to Y_1,\quad f_2:X_2\to Y_2,$$

是开映射。那么映射

$$f_1\times f_2:X_1\times X_2\to Y_1\times Y_2,\ (x,y)\to(f_1(x),f_2(y))\text{ 是开的。}$$

证明: 形如$A\times B$的集，A为X_1中的开集且B为X_2中的开集，组成—$X_1\times X_2$中开集的基。因为

$$(f_1\times f_2)(A\times B)=f_1(A)\times f_2(B),$$

其结果可见。

命题6.4 设E是一平移不变的不分明拓扑空间，若F是一不分明子空间，那么E/F及其商不分明拓扑是一不分明拓扑向量空间。

证明： 令

$$\phi:\ E\times E\rightarrow E,\quad (x,y)\rightarrow x+y,$$

$$\phi_F:\ E/F\times E/F\rightarrow E/F,\ (\hat{x},\hat{y})\rightarrow\hat{x}+\hat{y}.$$

下面的图形是交换的。

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \xrightarrow{\ \phi\ } & E \\ \downarrow q\times q & & \downarrow q \\ E/F\times E/F & \xrightarrow[\ \phi_F\ ]{} & E/F \end{array}$$

设w是在E/F中的一开集。那么集$V=(qo\phi)^{-1}(W)$是在$E\times E$中的开集。因为由6.2和6.3 $q\times q$是开的，不分明集$V_1=(q\times q)(V)$是在$E/F\times E|F$中的开集。但是$V_1=\phi_F^{-1}(W)$。这便证明了ϕ_F是连续的。映射

$$\psi_F:K\times E/F\rightarrow E/F,\ (\lambda,\hat{x})\rightarrow\lambda\hat{x},$$

连续性的证明是类似的。

命题6.5 设$\{E_i\}_{i\in I}$是在K上之不分明拓扑向量空间族而且$E=\Pi E_i$具有积不分明拓扑。那么E是一不分明拓扑向量空间

证明： 设$p_i:E\rightarrow E_i$表示i射影映射而且

$$\phi:E\times E\rightarrow E,\quad (x,y)\rightarrow x+y$$

$$\phi_i:E_i\times E_i\rightarrow E_i,\ (x,y)\rightarrow x+y.$$

下面的图形是交换的。

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \xrightarrow{\ \phi\ } & E \\ \downarrow p_i\times p_i & & \downarrow p_i \\ E_i\times E_i & \xrightarrow{\ \phi_i\ } & E_i \end{array}$$

因为$p_i\times p_i$是连续的，合成$\phi_i o(p_i\times p_i)$是连续的。因为每一$p_i o\phi$是连续的，由〔10，定理3.1〕可见ϕ是连续的。类似的，我们证明函数

$$\psi:K\times E\rightarrow E,\ (\lambda x)\rightarrow\lambda x$$

是连续的。这便证得E是不分明拓扑向量空间。

参考文献

1. J·G BROWN. A noteon fuzzy sets. Information and Control 18 (1971) 32—39
2. C·L·CHANG, Fuzzy topological spaces, J·Math Anal. Appl 24 (1968) 182—190

3. A·DELUCA. AND S·TERMINI Algebraic properties of fuzzy sets, J·Math. Anal Appl. 40(1972)373—386
4. A·DELUCA. AND S·TERMINI, A definition of non—probabi Listic entropy in the setting of fuzzy sets Theory, Information and control. 20(1972)301—312
5. J·A·GOGUEN L—fuzzy sets, J·Math, And. Appl. 18(1967)145—174
6. J·A GOGUEN The fuzzy Tychonoff. theorem, J·Math. And. Appl.43 (1973)734—742
7. A. NETTO, fuzzy classes, Notices Amer. Math Soc. Notice 68T-428 (1968)945
8. A. ROSENFELD. Fuzzy groups, J·math. Anal. Appl. 35(1971), 512—517
9. C·W. WONG, covering properties of fuzzy topological spaces. J·Math. Anal Appl. 43(1973), 697—704
10. C·W·WONG Fuzzy topology: product and quotient thedrem. J math Anal Appl. 45(1974) 512—521
11. L. A. ZADEH. Fuzzy sets. Information and Control 8 (1965), 338—353
12. L.A. ZADEH. Fuzzy sets and systems, proceedings of the symposium on Systems theory, PP. 29—37, Polytechnic Press of Polytedrnic Inst of Brooklyn. New York 1965
13. L. A ZADEH Shadows of fuzzy sets, problems of Information Transmision 2. NO. 1(1966)37—44
14. L·A ZADEH Fuzzy algorithms, Information and Control 12(1968) 94—102
15. L·A·ZADEH Probability measures of fuzzy events J·math Anal、Appl 23(1968), 421—423
16. L·A·ZADEH, Towards a theroy of fuzzy systems ERL Report 69—2, Electrorics Research Lab, Univ of Calif, Berkeley 1969.

本文译自《JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS》 58 135—146(1977)

(蒲 义 书 译)

关于不分明集扩张原理的注

Hùng T.Nguyen

1．绪 言

L.A.Zadeh 在〔5〕中叙述的扩张原理，对于扩张映射的定义域或定义在集 U 到其不分明子集上的关系提供了一个自然的方法。它在语言变量的计算〔5〕、语言概率的计算〔3，5〕、模糊数算术〔1,5〕等方面，以及更一般地，在需要扩张关系的定义域的应用方面是特别有用的。而且像〔1〕中所表明的，在不分明分析中，集一方法（即，利用不分明集的 α一级集(α－level sets)）较函数方法（即，利用不分明集的隶属函数）更简单。

在这个注中，我们研究恒等式分解〔5〕，即不分明集的集——表示法。并且还证明把扩张原理应用到不分明集可视为把该原理应用到上述集合的 α－级集。然而，若

$$f: X\times Y\rightarrow Z$$

且A、B分别是X和Y的不分明子集，则一般并无等式

$$\Big[f(A,B)\Big]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha) \qquad (1.1)$$

其中A_α、B_α分别是A和B的α一级集。$\Big[f(A,B)\Big]_\alpha$是$f(A,B)$的 α一级集。

我们将给出一个得到等式（1.1）的必要而且充分条件。并将定义一类不分明数，使得在这类不分明数中，等式（1.1）对所有的连续函数皆成立。

2．恒等式的分解

集合X的全体不分明子集族用$\mathscr{P}_{\sim}(X)$表示。若$A\in\mathscr{P}_{\sim}(X)$，$A$的隶属函数用$\mu_A: X\rightarrow[0,1]$表示。若$A$是分明的，$A$的隶属函数记为$/_A$。

对$\alpha\in[0,1]$，A的α一级集由

$$A_\alpha=\{x\in X: \mu_A(x)\geqslant\alpha\}$$

定义 若A、$B\in\mathscr{P}\sim(X)$，由定义 $A=B$ 当且仅当$\forall x\in X$，$\mu_A(x)=\mu_B(x)$。容易验证

$$A=B\Leftrightarrow A_\alpha=B_\alpha \quad \forall\alpha\in[0,1]$$

不分明集A的支集（support）S_A由

$$S_A=\{x: \mu_A(x)>0\}$$

定义 显然 $S_A=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}A_\alpha$ 另一方面，我们有

$$\forall x\in X,\ \mu_A(x)=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha /_{A_\alpha}(x)] \qquad (2.1)$$

于是A可按下述形式表示

$$A=\int_0^1 \alpha A_\alpha \tag{2.2}$$

这种形式叫恒等式分解〔5〕，这里$\int_0^1$表示遍及$\alpha\in[0,1]$的和，αA_α为不分明集，其隶属函数是

$$1_{\alpha A_\alpha}(x)=\begin{cases}\alpha & 若x\in A_\alpha\\ 0 & 若x\notin A_\alpha\end{cases}$$

命题 2.1.若A'_α，$\alpha\in[0,1]$，是X的一个子集族使得

$$A=\int_0^1 \alpha A'_\alpha$$

则 (i) $A'_\alpha\subseteq A_\alpha \quad \forall\alpha\in[0,1]$

(ii) $\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} A_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]} A'_\alpha$

证明：(i) 令 $x\in A'_\alpha$，则$\alpha_0 1_{A'_{\alpha_0}}(x)=\alpha_0$ 于是

$\mu_A(x)=\sup\limits_{\alpha\in[0,1]}[\alpha 1_{A'_\alpha}(x)]\geqslant\alpha_0 \Longrightarrow x\in A_{\alpha_0}$。

(ii)。(ii)式由下述事实而得。即(ii)的左、右两边都等于A的支集S_A。 证完

3. 扩张原理

若$f:X\to Y$，$A\in\mathscr{P}_\sim(X)$。则经过扩张原理，不分明集$f(A)$由

$$f(A)\in\mathscr{P}_\sim(Y),\ \mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A(x) \tag{3.1}$$

定义。

注：为了把这个原理应用于模糊映射，我们把（3.1）写为下述等价形式

$$\mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in X}[\mu_A(x)\wedge 1_{f(x)}(y)] \tag{3.2}$$

这里 $$1_{f(x)}(y)=\begin{cases}1 & 当\ y=f(x)\\ 0 & 当\ y\neq f(x)\end{cases}$$

若f是多值映射，即$f:X\to\mathscr{P}_\sim(Y)$，$A\in\mathscr{P}_\sim(X)$ 则（3.1）导出

$$\mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in f^*(y)}\mu_A(x) \tag{3.3}$$

其中 $f^*:Y\to\mathscr{P}_\sim(X)$

$f^*(y)=\{x\in X: y\in f(x)\}$

易见（3.3）是和

$$\mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in X}[\mu_A(x)\wedge 1_{f(x)}(y)] \tag{3.4}$$

一样的。对于 $B\neq\phi$ 且 $B\subseteq Y$，我们有

$$f^{*}(B)=\{x\in X: f(x)\cap B\neq\phi\}$$

$P(x)$表示X的全体子集族。

现在令X^{*}是f的定义域。即

$$X^{*}=\{\chi\in X: f(x)\neq\phi\}$$

且 $f_{*}:\wp(Y)\rightarrow\wp(X): f_{*}(B)=\{x\in X^{*}: f(x)\subseteq B\}$

则 $f_{*}(B)\subseteq f^{*}(B)\quad \forall B\neq\phi$

且 $f_{*}(B)=[f^{*}(B')]'$

这里右上角的"$'$"表示余集。于是

$$1_{f_{*}(B)}(x)=1-1_{f^{*}(B')}(x)$$

但 $1_{f^{*}(y)}(x)=1_{f(x)}(y)$

因此， $1_{f_{*}(B)}(x)=1-\sup\limits_{y\in B'}1_{f(x)}(y)$

还要注意， $1_{f^{*}(B)}(x)=\sup\limits_{y\in B}1_{f(x)}(y)$

若f是一不分明映射即：$f: X\rightarrow\wp_{\sim}(Y)$ 且$A\in\wp_{\sim}(X)$则（3.2）导出

$$\mu_{f(A)}(y)=\sup_{x\in X}[\mu_{A}(x)\wedge\mu_{f(x)}(y)]\tag{3.5}$$

用

$$\mu_{f^{*}(y)}(x)=\mu_{f(x)}(y)\tag{3.6}$$

定义 $f^{*}: Y\rightarrow\wp_{\sim}(X)$

对于$B\subseteq Y$，由（3.5）及（3.6）我们有

$$\begin{aligned}\mu_{f^{*}(B)}(x)&=\sup_{y\in Y}[1^{B}(y)\wedge\mu_{f^{*}(y)}(x)]\\&=\sup_{y\in Y}[1_{B}(y)\wedge\mu_{f(x)}(y)]\\&=\sup_{y\in B}\mu_{f(x)}(y)\end{aligned}$$

命题3.1 令$A\in\wp_{\sim}(X)$[注]且$f: X\rightarrow Y$ 则

$$f(A)=\int_{0}^{1}\alpha f(A_{\alpha})\tag{3.7}$$

证明：

$$\begin{aligned}\mu_{f(A)}(y)&=\sup_{x\in f^{-1}(y)}\mu_{A}(x)\\&=\sup_{x\in f^{-1}(y)}[\sup_{\alpha\in(0,1)}[\alpha 1_{A_{\alpha}}(x)]]\ (\text{由}2.1)\\&=\sup_{\substack{x\in f^{-1}(y)\\ \alpha\in[0,1]}}[\alpha 1_{A_{\alpha}}(x)]\end{aligned}\tag{3.8}$$

另一方面，令 $B=\int_{0}^{1}\alpha f(A_{\alpha})$ 则

$$\mu_B(y)=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha 1_{f(A_\alpha)}(y)]$$

$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\sup_{x\in f^{-1}(y)}[1_{A_\alpha}(x)]]$$

$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\sup_{x\in f^{-1}(y)}[\alpha\cdot 1_{A_\alpha}(x)]] \qquad \because \alpha\geqslant 0$$

〔注〕. 原文为$A\in\wp_\sim(x)$——译者

$$=\sup_{\substack{x\in f^{-1}(y)\\ \alpha\in[0,1]}}[1\alpha_{A_\alpha}(x)]=\mu_{f(A)}(y).$$

证完

注. 由上述可见

$$f(A)=\int_0^1\alpha[f(A)]_\alpha=\int_0^1\alpha f(A_\alpha)$$

并且 $\forall\alpha\in[0,1]$有 $f(A_\alpha)\subseteq[f(A)]_\alpha$.

但一般说来， $f(A_\alpha)\neq[f(A)]_\alpha$.

命题 3.2 令 $f:X\times Y\to Z$, 且$A\in\wp_\sim(X)$, $B\in\wp_\sim(Y)$

则 $$f(A,B)=\int_0^1\alpha f(A_\alpha,B_\alpha) \tag{3.9}$$

证明： (i). $\mu f_{(A,B)}(z)=\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)}[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)]$

$$=\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)}[\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{A_\alpha}(x)\wedge\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{B_\alpha}(y)] \tag{3.10}$$

(ii). 令 $T=\int_0^1\alpha f(A_\alpha,B_\alpha)$ 则

$$\mu_T(z)=\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1f_{(A_\alpha,B_\alpha)}(z)$$

$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)}\{\alpha 1_{A_\alpha}(x)\wedge\alpha 1_{B_\alpha}(y)\}] \tag{3.11}$$

$$=\sup_{\substack{\alpha\in[0,1]\\(x,y)\in f^{-1}(z)}}[\alpha 1_{A_\alpha}(x)\wedge\alpha 1_{B_\alpha}(y)]$$

为证明(3.10)与(3.11)等价，只须证明

$$[\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{A_\alpha}(x)]\wedge[\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{B_\alpha}(y)]=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha 1_{A_\alpha}(x)\wedge\alpha 1_{B_\alpha}(y)] \tag{3.12}$$

为此，令 $\alpha_0=\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{A_\alpha}(x)$

$$\beta_0=\sup_{\alpha\in[0,1]}\alpha 1_{B_\alpha}(y)$$

若 $\alpha_0\wedge\beta_0=0$,比如 $\alpha_0=0$,则对所有的$\alpha\in[0,1]$有$\alpha 1_{A_\alpha}(x)=0$，于是(3.12)被证实。

今假定 $\alpha_0 \wedge \beta_0 > 0$，我们有

$$x \in A_\alpha \qquad \alpha < \alpha_0$$

$$x \notin A_\alpha \qquad \alpha > \alpha_0$$

因为若存在α'使得

$$\alpha' < \alpha_0 \qquad x \in A_\alpha''$$

则对所有的$\alpha < \alpha'$有 $x \notin A\alpha$（此由$\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow A_\alpha \sqsupseteq A_\beta$可得）于是有与上面矛盾的不 等式

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha|_{A\bullet}(x) \leqslant \alpha' < \alpha_0$$

若存在 α''使得

$$\alpha'' > \alpha_0, \ x \in A\alpha''$$

则也有矛盾的不等式 $\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot 1_{A\bullet}(x) > \alpha_0$〔注〕

用同样的方法，我们有

$$y \in B_\bullet \qquad \alpha < \beta_0$$

$$y \notin B_\bullet \qquad \alpha > \beta_0$$

于是对$\alpha < \alpha_0 \wedge \beta_0$ 有 $\alpha|_{A\bullet}(x) \wedge \alpha|_{B\bullet}(y) = \alpha$，对所有$\alpha \geqslant \alpha_0 \wedge \beta_0$ 有 $\alpha|_{A\bullet}(x) \wedge \alpha|_{B\bullet}(y) = 0$，因此，

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha|_{A\bullet}(x) \wedge \alpha|_{B\bullet}(y)] = \alpha_0 \wedge \beta_0.$$ 证完

注．$\forall \alpha \in [0,1]$ 有 $f(A_\alpha, B_\alpha) \sqsubseteq [f(A,B)]_\alpha$，但一般说来 $f(A_\alpha, B_\alpha) \neq [f(A,B)]_\alpha$。

命题 3·3 令 $f: X \times Y \to Z$，$A \in \wp_\sim(X)$．$B \in \wp_\sim(Y)$．则等式

$$[f(A,B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha)$$

〔注〕．原文是．$\sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot |_{A\bullet}(x) \geqslant \alpha_0$——译者

成立的必要且充分条件是 $\forall z \in Z$，$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$被达到。

证明：(i) 必要性 令$z \in Z$

$$\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] = t.$$

即 $\mu_{f(A,B)}(z) = t \Longleftrightarrow z \in [f(A,B)]t$

$$\Longleftrightarrow z \in f(A_t, B_t)$$

即 存在 $\hat{x} \in A_t$，及 $\hat{y} \in B_t$使得 $f(\hat{x}, \hat{y}) = z$

因为 $(\hat{x}, \hat{y}) \in f^{-1}(z)$, $\mu_A(\hat{x}) \geqslant t$.

所以 $\mu_B(\hat{y}) \geqslant t \Longrightarrow \mu_A(\hat{x}) \wedge \mu_B(\hat{y}) \geqslant t$.

但 $\sup_{(x,y) \in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \geqslant \mu_A(\hat{x}) \wedge \mu_B(\hat{y})$

于是 $\mu_A(\hat{x}) \wedge \mu_B(\hat{y}) = t.$

(ii) 充分性　据命题3.2及命题2.1我们有

$$f(A_\alpha, B_\alpha) \subseteq [f(A,B)]_\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad \text{今令} \quad z \in [f(A,B)]_\alpha \quad \text{即}$$

$$\mu_{f(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] \geqslant \alpha \quad \text{若} \quad \mu_{f(A,B)}(z) > \alpha,$$

由sup的定义存在 $(\hat{x}, \hat{y}) \in f^{-1}(z)$ 使得

$$\alpha < \mu_A(\hat{x}) \wedge \mu_B(\hat{y}) \leq \mu_{f(A,B)}(z) \Rightarrow \hat{x} \in A_\alpha, \hat{y} \in B_\alpha.$$

于是　$z = f(\hat{x}, \hat{y}) \in f(A_\alpha, B_\alpha)$

若 $\mu_{f(A,B)}(z) = \alpha$，由假设，存在 $(x', y') \in f^{-1}(z)$ 使得

$$\mu_A(x') \wedge \mu_B(y') = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)] = \alpha.$$

$$\Longrightarrow \quad x' \in A_\alpha, \quad y' \in B_\alpha$$

于是　$z = f(x', y') \in f(A_\alpha, B_\alpha)$.　　证完

4. 关于不分明数的凸性

一个不分明数意指实直线 $\mathbb{R}$ 的一个不分明子集。区间分析〔2〕把有界闭区间（$\mathbb{R}$ 的紧致凸集）作为数的扩张来处理。不分明数可视作有界闭区间的扩张。不分明数的定义似乎太一般化了〔见不分明数的较小类第5部分〕。但是，不分明算术可通过扩张原理来定义。由于对于一般不分明数并不满足关系式（1·1）。所以函数法是分析的主要工具。为说明这一点，下面我们观察凸性的概念，并证明不分明数的一些性质。

令X是空间$\mathbb{R}^n$（或更一般地、实线性空间）为定义X的不分明子集的凸性。我们以如下陈述开始。X的子集 A 是凸的当且仅当 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$，$A_\alpha = \{x : 1_A(x) \geqslant \alpha\}$ 是凸的。

定义 4.1〔5〕　X的不分明子集A是凸的，如果它的隶属函数μ_A是拟凸的。

1．不分明算术中许多有趣的结果包含于M. Mizumoto S K. Tanaka 的新近一篇文章〔1〕中。例如，不分明数凸性、代数结构、序等。

注意．(i) 不分明凸性的一个有用特征是

$$A\text{凸} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0,1] \\ \mu_A[\lambda x + (1-\lambda) y] \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) \end{cases}$$注

(ii). 若A是凸的，它的支集S_A也是凸的.

命题 4·2 下述两条是等价的.

(i). $A \in \mathscr{P}(X)$是凸的，

(ii). $\forall, x, y \in X$，函数　$\lambda \to \mu_A[\lambda x + (1-\lambda) y]$ 在$[0,1]$上是拟凹的.

证明：用Φ表示函数$\lambda \to \mu_A[\lambda x + (1-\lambda) y]$　　(i)$\Rightarrow$(ii)　令 $\lambda', \lambda'' \in [0,1]$, $\lambda \in [\lambda', \lambda'']$（假定$\lambda' < \lambda''$）对$x, y \in X$，令

$$\hat{x} = \lambda' x + (1-\lambda') y.$$

$$\hat{y} = \lambda'' x + (1-\lambda'') y.$$

则存在 $\alpha \in [0,1]$，使得 $\lambda = \alpha\lambda' + (1-\alpha)\lambda''$. 且

注：原文为 $\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$。

$$\begin{aligned}\alpha\hat{x}+(1-\alpha)\hat{y} &= [\alpha\lambda'+(1-\alpha)\lambda'']x+[\alpha(1-\lambda')+(1-\alpha)(1-\lambda'')]y \\ &= [\alpha\lambda'+(1-\alpha)\lambda'']x+[1-\{\alpha\lambda'+(1-\alpha)\lambda''\}]y \\ &= \lambda x+(1-\lambda)y^{注}=\hat{z}\end{aligned}$$

注：原文为：$\lambda x+(1-\Lambda)y$。

据 μ_A 的拟凹性有

$$\mu_A(\hat{z})\geqslant\mu(\hat{x}_A)\wedge\mu_A(\hat{y})$$

即 $\quad\phi(\lambda)\geqslant\phi(\lambda')\wedge\phi(\lambda'')$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 令 $x,y\in X$，$z=\lambda x+(1-\lambda)y$，$\lambda\in[0,1]$

$$\phi(0)=\mu_A(y)\qquad\phi(1)=\mu_A(x)$$

因为 $0\leq\lambda\leq1$，由 ϕ 在 $[0,1]$ 上的拟凹性 $\Longrightarrow\phi(\lambda)\geqslant\phi(0)\wedge\phi(1)$ 即

$$\mu_A[\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$$ 证完

定义 4·3 X 的不分明子集 A 是强凸的，如果 A 是凸的且它的隶属函数是伪凹的。

注：(i) 函数 $f: X\to R$ 是伪凹的[4]，如果

$\forall\ x,y\in X$ 使得 $f(x)\neq f(y)$

$\forall\ z=\lambda x+(1-\lambda)y\quad\lambda\in[0,1]$

有 $\quad f(z)>f(x)\wedge f(y)$

(ii). 凸性的这个概念对不分明数学的程序设计是有用的。注意，拟凹函数 的局部最大值不必是总的最大值，而对于伪凹函数来讲，局部最大值也是总的最大值。

命题 4·4 X 的凸不分明子集 A 是强凸的，如果它的隶属函数 μ_A 在 $\{\mu_A<1\}$ 上是内射。

证明： 据 μ_A 的拟凸性，有

$\forall\ x,y\in X,\quad\forall\lambda\in[0,1]\qquad z=\lambda x+(1-\lambda)y$

$$\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)\tag{4·1}$$

我们必须验证，对于使得 $\mu_A(x)\neq\mu_A(y)$ 的 (x,y) 及 $\lambda\in(0,1)$，(4.1) 中的严格 不等 式成立。考虑两种情况：

(i) $\mu_A(x)=1$，且 $\mu_A(y)<1$。

(a) 若 $\mu_A(z)=1$，$\Longrightarrow\mu_A(z)>\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$

(b) 若 $\mu_A(z)<1$，则由 μ_A 在 $\{\mu_A<1\}$ 上的内射性有 $\mu_A(z)\neq\mu_A(y)$，而 $\mu_A(z)$ 满足 (4·1) 即，

$$\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)=\mu_A(y).$$

于是 $\quad\mu_A(z)>\mu_A(y)$。

(ii) $x,y\in\{\mu_A<1\}$。

(a) 若 $z\in\{\mu_A=1\}\Longrightarrow\mu_A(z)>\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$。

(b) 若 $z\in\{\mu_A<1\}$ 则从 (4·1)。

$$\mu_A(z)\geqslant\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$$

而 $\quad z\neq x\neq y\Longrightarrow\begin{cases}\mu_A(z)\neq\mu_A(x)\\ \mu_A(z)\neq\mu_A(y)\end{cases}$

因此，$\quad\mu_A(z)>\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)$ 证完

注．应当注意拟凸性和伪凹性是两个不同的概念，若 f 是伪凹的，则对使 $f(x)\neq f(y)$ 的 $\forall x,y$ 和 $\lambda\in(0,1)$　　我们有．

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]>f(x)\wedge f(y).$$

但对使 $f(x)=f(y)$ 的 (x,y)，可能发生

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]<f(x)\wedge f(y).$$

$\mathbb{R}^n$ 的不分明凸集具有普通凸集的大部分代数性质。下述命题是和到不分明集的扩张。

命题　4·5　若 A、$B\in\mathscr{P}_{\sim}(\mathbb{R}^n)$ 是凸的，则 $A+B$ 也是凸的。

证明：注意，$A+B$ 是经由扩张原理定义的 $\mathbb{R}^n$ 的不分明子集。

$$\mu_{A+B}(z)=\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z}}[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)]$$

(i)．记　$\phi(x,y)=\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)$，令 (x',y')，$(x'',y'')\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$　且 $\lambda\in[0,1]$．

$$x=\lambda x'+(1-\lambda)x''.$$
$$y=\lambda y'+(1-\lambda)y''.$$

我们有　　$\phi(x,y)\geqslant[\mu_A(x')\wedge\mu_A(x'')]\wedge[\mu_B(y')\wedge\mu_B(y'')]$ 于是 ϕ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上是拟凹的．

(ii)．令　$z',z''\in\mathbb{R}^n$，$\lambda\in[0,1]$，$z=\lambda z'+(1-\lambda)z''$　令 $\varepsilon>0$，并假定存在 (x_1,y_1)（依赖于 ε）使得 $x_1+y_1=z'$ 且

$$\phi(x_1,y_1)\geqslant\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z'}}\phi(x,y)-\varepsilon \tag{4·2}$$

还存在 (x_2,y_2) 使得：

$$x_2+y_2=z'',\ 且\ \phi(x_2,y_2)\geqslant\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z''}}\phi(x,y)-\varepsilon \tag{4·3}$$

由　$z=\lambda z'+(1-\lambda)z''\Longrightarrow z=\lambda(x_1+y_1)+(1-\lambda)(x_2+y_2)=\hat{x}+\hat{y}$

其中　　$\hat{x}=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，

$\hat{y}=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$．

据 ϕ 的拟凹性，我们有

$\sup\limits_{\substack{(x,y)\\x+y=z}}\phi(x,y)\geqslant\phi(\hat{x},\hat{y})\geqslant\phi(x_1,y_1)\wedge\phi(x_2,y_2)$．因此，由(4.2)和(4.3)有

$$\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z}}\phi(x,y)\geqslant[\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z'}}\phi(x,y)-\varepsilon]\wedge[\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z''}}\phi(x,y)-\varepsilon]$$

$$\geqslant[\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z'}}\phi(x,y)\wedge\sup_{\substack{(x,y)\\x+y=z''}}\phi(x,y)]-\varepsilon$$

并且这个不等式对所有的 $\varepsilon>0$ 都成立。于是

$\mu_{A+B}(z) \geqslant \mu_{A+B}(z') \wedge \mu_{A+B}(z'')$. 证完

注。不分明凸集A称为在它的支集上是强凸的，如果μ_A在s_A上的局限是伪凹的，于是作为命题 4.5 的结果，不分明凸集在其支集上是强凸的，μ_A在$s_A - \{\mu_A = 1\}$上是内射，$\mathbb{R}^n$的有界凸集在其支集上不是强凸的。

5。一类不分明数

令 $A \in \mathscr{P}_\sim(\mathbb{R})$，$A$的支集用$s_A$表示，$A$的隶属函数$\mu_A$的拓扑支集是$\overline{S}_A = \overline{\{x : \mu_A(x) \neq 0\}}$。即$S_A$的闭包。

我们考虑下述不分明数类：

$$A \in \mathscr{P}_\sim(\mathbb{R}, S, K) \iff \begin{cases} A \in \mathscr{P}_\sim(R) \\ \mu_A \text{是上半连续的}(u, s, c) \\ \overline{S}_A \text{是紧的} \end{cases}$$

这一类包含了所有单点集（Sing letons）以及有界闭区间。

命题 5·1 若 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to R$ 是连续的，则 $\forall A, B \in \mathscr{P}_\sim(\mathscr{R}, \mathscr{S}, \mathscr{K})$ 有

$$[f(A,B)]_\alpha = f(A_\alpha, B_\alpha) \qquad \alpha \in [0,1]$$

证明：由于命题3.3，只须证明

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]$$

被达到。

令 $\phi(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$，则 $\phi(x,y) \geqslant 0$ 且ϕ是u、s、c的，于是

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \phi(x,y) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)\cap(\overline{S}_A\times\overline{S}_B)} \phi(x,y)$$

此因在$\overline{S}_A \times \overline{S}_B$的外部$\phi = 0$

而$\overline{S}_A \times \overline{S}_B$是紧的，据$f$的连续性$f^{-1}(z)$是闭的，因此，$f^{-1}(z) \cap (\overline{S}_A \times \overline{S}_B)$是紧的。

于是，ϕ(它是u、s、c的)在紧致集。

$$f^{-1}(z) \wedge (\overline{S}_A \times \overline{S}_B) \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

上取到了它的最大值。 证完。

注。应当注意〔1〕中出现的下列等式（对$A, B \in \mathscr{P}_\sim(\mathbb{R})$）

$$(A+B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha.$$

$$(A \times B)_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha.$$

仅在前面注出的附加假设下才是成立的。

参 考 文 献

1. M.Mizumoto and K.Tanaka,Algebraic properties of fuzzy numbers, in"Inter.Conberence on Cybernetics and Society,Washington. D、C. 1976" Math anal。Appl,to appear.

2. R.E.Moore "Interval Analysis" ,Prentice-Hall,Englewood Cliffs,

N.J.1966.

3. H.T.Nguyen,Qn fuzziness and linguistic probablities,Memo,ERLM 595(June 1976)Univ, of California, Berkeley, J, Math. Anal, appl, to appear.

4. J, Stoer and C, Wtizgall, "Convexity and Qptimization in Timite Dimensions" Springer—Verlag, New York/Berlin, 1970

5. L.A.Zadeh,The Concept of linguistic variable and its application to opproximate reasoning,Inform, Sci. 8(1975)199—249,301—357, 9(1975), 43—80.

6. L.A.Zadeh, Tuzzy sets, Inform. Contr. (1965)338—353.

（本文译自J, Math, AnaL, AppL, 64(1978) 369—380）

（赵万忠译）

不分明拓扑空间中不同的紧性概念之比较

R.Lowen

绪　言

本文研究至今所引入的不同的紧性概念类。我们仅限于文〔4〕中定义的不分明拓扑空间。第一部分给出一些可能的特性。对于一个好的模糊紧性的定义，我们要求在拓扑空间的特殊情况下，它应于通常的紧性概念相一致。

第二部分说明哪一种紧性概念是良扩张，哪一种紧性概念不是良扩张。此外，我们希望拓扑空间中紧性的基本性质，即乘积上的 Tychonoff 定理在更一般的不分明拓扑空间的安置中也能满足。

第三部分我们将看一看对哪些概念有乘积定理。

本文译自 J. Math. Anal. Appl. 64(1978) 446—454

第四部分研究不同概念之间存在的联系。第五部分给出一些结论性注释。

1. 定义和初步结果

下面列举的各个概念在以前的文章中已经定义。而概念（IV）和（V）是我们新加的。

——（X，δ）是文〔4〕中定义的不分明拓扑空间；

——按文〔2〕，不分明子集族$\beta\subset I^X$叫α—（α^*—）荫蔽（shading）当且仅当对所有的$x\in X$，存在一个$\mu\in\beta$使得，$\mu(x)>\alpha$（$\mu(x)\geqslant\alpha$）；

——若A是任一集合，则$2^{(A)}$是A的有限子集族；

——I表示单位区间，按文〔4〕，I_r是具有拓扑$T_r=\{(\alpha,1]:\alpha\in I\}\cup\{I\}$的$I$。

按文〔4〕，若δ是X上的不分明拓扑，则$c(\delta)$是X上关于函数族δ和拓扑空间I_r的最初

拓扑；

定义 Ⅰ〔1〕．(X,δ)是拟不分明紧的当且仅当对所有使得$\sup\limits_{\mu\in\beta}\mu=1$的族$\beta\subset\delta$，存在$\beta_0\in 2^{(\beta)}$使得$\sup\limits_{\mu\in\beta_0}\mu=1$

定义 Ⅱ〔2〕．令$0\leq\alpha<1$，(X,δ)是α—紧的当且仅当δ中的每个α—荫蔽族有一有限α—荫蔽子族；

定义 Ⅲ〔2〕．令$0<\alpha\leq 1$，(X,δ)是α^*—紧的当且仅当δ中的每个α^*—荫蔽族有一有限α^*—荫蔽子族；

定义 Ⅳ．(X,δ)是强不分明紧的当且仅当对每个$\alpha\in I\setminus\{1\}$，它是$\alpha$—紧的．

定义 Ⅴ．(X,δ)是超不分明紧的当且仅当$(X,\iota(\delta))$是紧的。

定义 Ⅵ〔4〕．(X,δ)是弱不分明紧的当且仅当对使得$\sup\limits_{\mu\in\beta}\mu=1$的每个族$\beta\subset\delta$及每个$\varepsilon>0$，存在$\beta_0\in 2^{(\beta)}$使得$\sup\limits_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant 1-\varepsilon$

定义 Ⅶ〔4〕．(X,δ)是不分明紧的当且仅当对使得$\sup\limits_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha$的每个族$\beta\subset\delta$和每个$\alpha\in I$以及每个$\varepsilon\in(0,\alpha)$，存在$\beta_0\in 2^{(\beta)}$使得$\sup\limits_{\mu\in\beta_0}\mu\geqslant\alpha-\varepsilon$

族$\{\nu^{-1}(\alpha,1]:\nu\in\delta,\alpha\in I\}$是$l(\delta)$的一个子基，并且若对所有的$\alpha\in I\setminus\{1\}$置

$$\iota\alpha(\delta)=\{\nu^{-1}(\alpha,1]:\nu\in\delta\}$$

则$L\alpha(\delta)$是X上一个拓扑，且显然

$$\iota(\delta)=\sup_{\alpha\in I\setminus\{1\}}\iota\alpha(\delta).$$

用类似的方法，对所有的$\alpha\in I\setminus\{0\}$可引入集合

$$\mathscr{S}\alpha=\{\nu^{-1}[\alpha,1]:\nu\in\iota\delta\}$$

但，$\mathscr{S}\alpha$不是X上的拓扑，而是我们将用$^*\alpha(\delta)$表示的那个拓扑的一个基。

命题 1.1 (X,δ)是α—紧的（α^*—紧的）当且仅当$(X,\iota\alpha(\delta))$ $((X,\iota\alpha^*(\delta)))$是紧的。

证明：此由不分明集族β是α—荫蔽（α^*—荫蔽）当且仅当

$\bigcup\limits_{\mu\in\beta}\mu^{-1}(\alpha,1]=X$ （$\bigcup\limits_{\mu\in\beta}\mu^{-1}[\alpha,1]=X$）这一结果立即可得。

与文〔5〕中定理1·5相类似，可以证明下面的结果。这里，$\sup\limits_{j\in J}f^{-1}{}_j(\delta_j)$是〔5〕中定义的最初不分明拓扑。

命题 1·2 令X是一集合，$(Y_j,\delta_j)_{j\in J}$是一不分明拓扑空间族，并且对所有的$j\in J$令f_j是从X到Y_j的一个函数。则

$$l\alpha(\sup_{j\in J}f_j{}^{-1}(\delta_j))=\sup_{j\in J}f_j{}^{-1}(\iota\alpha(\delta_j)).$$

证 明. 由对任何 $j\in J$ 及任何 $\nu\in\delta_j$ 有 $(f_j^{-1}(\nu)^{-1}(\alpha,1]=f_j^{-1}(\nu^{-1}(\alpha,1])$ 可见，$\iota\alpha(f_j^{-1}(\delta_j))=f_j^{-1}(l\alpha(\delta_j))$。今对所有的 $j\in J$ 置 $\nu_j=f_j^{-1}(\delta_j)$，那么还须证明

$\sup_{j\in I} l\alpha(\gamma_j)$

$=l\alpha(\sup_{j\in I}\gamma_j)$ 令 γ 是一集合，对所有的 $\lambda\in\nu$ 令 J_λ

$\in 2^{(I)}$ 并且对每个 $j_\lambda\in J_\lambda$ 令 $\nu_{j_\lambda}\in Y_{j_\lambda}$ 则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{j_\lambda\in J_\lambda}\nu_{j_\lambda}^{-1}(0,1]=(\sup_{\lambda\in\Lambda}\inf_{j_\lambda\in J_\lambda}V_{j_\lambda})^{-1}(0,1]$$

这表明 $\sup_{j\in I}\iota\alpha(\gamma_j)$ 中的每一集合都在 $\iota\alpha(\sup_{j\in I}\gamma_j)$ 中，反之亦然。

2. 良 扩 张

令 Top 表示拓扑空间类，Fuz 表示不分明拓扑空间类。在文〔4〕中定义了函子

$$\tilde{\omega}: \mathrm{Top}\sim\!\!\to\mathrm{Fuz}$$

它把每个拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 同 $(X,w(\mathscr{T}))$ 联系起来。这里 $w(\mathscr{T})$ 是由从 $(X,\mathscr{T})$ 到 Ir 的所有连续函数所组成的不分明拓扑。不分明拓扑空间 $(X,w(\mathscr{T}))$ 叫做拓扑生成的。

已经证明，$\tilde{\omega}$(Top) 是 Fuz 的一个完全子类。由于 $\tilde{\omega}$(Top) 与 Top 同构，所以我们可以把它们等同起来，并说 Top 是 Fuz 的一个完全子类。当我们在 Fuz 中引入 Top 中之概念的推广时，很自然，应当要求这种推广在局限于 Top 时将给出原来的概念。这样的扩张称为良扩张（good extantion）。对于 Fuz 中的紧性定义是良扩张来说，这意味着拓扑生成的不分明拓扑空间必是紧的当且仅当基础拓扑空间是紧的。现在我们来证明前面哪些定义是良扩张。

定理 2·1 定义（Ⅱ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）、（Ⅵ）、和（Ⅶ）是紧性的良扩张。

证明. 定义（Ⅱ）是良扩张由下面实事可见。若 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，且 $\alpha\in I\backslash\{1\}$，则 $\iota_\alpha(w(\mathscr{T}))=\mathscr{T}$。事实上，我们知道 $\iota(w(\mathscr{T}))=\mathscr{T}$（见文〔4〕命题 2.1）。且由于 $\iota(w(\mathscr{T}))=\sup_{\alpha\in I}\iota_\alpha(w(\mathscr{T}))$，故总有 $\iota_\alpha(w(\mathscr{T}))\subset\mathscr{T}$。反之，令 $A\in\mathscr{T}$。则 $X_A\in w(\mathscr{T})$，于是 $A=X_A^{-1}(\alpha,1]\in\iota_\alpha(w(\mathscr{T}))$。（Ⅳ）是（Ⅱ）的直接结果。（Ⅴ）由事实 $\iota(w(\mathscr{T}))=\mathscr{T}$ 立刻可见。关于（Ⅵ）和（Ⅶ）在〔L1〕中已被证明。定理 4.1.

反 例

文〔4〕证明了（Ⅰ）不是良扩张。然而，我们可更加惊人地观察到下述事实。即，没有不分明拓扑空间 (X,δ) 会是拟不分明紧的。因为只要令 $\beta=\{\alpha:\alpha$ 是常数，且 $\alpha<1\}\subset\delta$ 就足够了。这时 $\sup_{\mu\in\beta}\mu=1$，但无有限子族复盖 1。由下述结果可见（Ⅲ）不是良扩张。设

X是无限集，$\mathcal{T}$是X上的有限余拓扑，则于任何$\alpha\in I\setminus\{0\}$，$(X,w(\mathcal{T}))$都不是$\alpha^*$—紧的，为说明这个结果，我们如下进行。注意 $\nu\in w(\mathcal{T})$ 当且仅当对所有的$\alpha\in I$，$\nu^{-1}[0,\alpha]$要么是有限的要么等于X。今选取$\alpha\in I\setminus\{0\}$，取$X$的子集族$\{A_n:n\in N\}$使得对每个$n\in N$，$A_n$具有可数余集，且使得$\{A_n:n\in N\}$复盖$X$而无有限子复盖。

对每个$n\in N$置

$$A_n^c=\{x_1^n,x_2^n,\cdots\}$$

令 $\nu_n:X\longrightarrow I$ 使得

$$\nu_n(x)=\begin{cases}\alpha, & 当\ x\in A_n,\\ \alpha-\dfrac{\alpha}{j}, & 当\ x=x_j^n\in A_n^c\ j=1,2,\cdots\end{cases}$$

显然对所有$n\in N$有：若$\alpha'<\alpha$，则存在$j_0\in N$使得如果$j>j_0$就有 $\alpha-\dfrac{\alpha}{j}>\alpha'\geqslant\alpha-\dfrac{\alpha}{j_0}$，

因而 $\nu_n^{-1}[0,\alpha']=\{x_1^n\cdots,x_{j_0}^n\}$是有限的。若 $\alpha'\geqslant\alpha$ 则 $V_n^{-1}[0,\alpha']=X$。于是对所有的$n\in N$ $\nu_n\in w(\mathcal{T})$。其次，对所有的$x\in X$存在$n\in N$使得$x\in A_n$，于是$\nu_n(x)=\alpha$。这说明$\{\nu_n:n\in N\}$是$w(\mathcal{T})$中的一个α^*—荫蔽，现在对任何有限子族$\{\nu_k:k\in K\}$，

$K\in 2^{(N)}$，取$y\notin\bigcup_{k\in K}A_k$，则对所有的$k\in K$存在$j_k$使得$y\in x_{j_k}^k$，于是$\nu_k(y)=\alpha-\dfrac{\alpha}{j_k}<\alpha$
这说明，无有限子族是α^*—荫蔽。因此，$(X,w(\mathcal{T}))$不是α^*—紧的。

此外这个例子还证明α^*—紧性是非常强的条件。由此可见，实际上没有由T_1—拓扑生成的不分明拓扑空间对任何$\alpha\in I\setminus\{0\}$会是$\alpha^*$—紧的。

3. 乘积定理

由于第二部分的结果，从现在起，我们把注意力限制于良扩张(Ⅰ)、(Ⅳ)、(Ⅴ)、(Ⅵ)和(Ⅶ)。

首先，我们将用命题1.2和1.2，对α—紧的不分明拓扑空间的乘积定理给出一个非常简单的证明。

定理 3.1〔2〕若$(X_j,\delta_j)_{j\in J}$是不分明拓扑空间族，则$(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\delta_j)$是$\alpha$—紧的当且仅当对所有的$j\in J$，$(X_j,\delta_j)$是$\alpha$—紧的。

证明： 由命题1·1可见，$\prod_{j\in J}\delta_j$是α—紧的当且仅当$\iota_\alpha(\prod_{j\in J}\delta_j)$是紧的，所以只要注意到如下事实就够了。由命题1·2有$\iota_\alpha(\prod_{j\in J}\delta_j)=\prod_{j\in J}\iota_\alpha(\delta_j)$，而$\prod_{j\in J}\iota_\alpha(\delta_j)$是紧的当且仅当对所有的$j\in J$，$\iota_\alpha(\delta_j)$是紧的，这再次意味着对所有的$j\in J$，$\delta_j$是$\alpha$—紧的。

由上述定理及强不分明紧性的定义立刻可见，对于强不分明紧性也有乘积定理。

定理 3·2 若$(X_j,\delta_j)_{j\in J}$是不分明拓扑空间族，则$(\prod_{j\in J}X_j,\prod_{j\in J}\delta_j)$是强不分明

紧的当且仅当对所有的 $j\in J$，(X_j,δ_j) 是强不分明紧的。

证明：对每一级 α 应用定理 3.1。

关于超不分明紧性也有如下结果。

定理 3·3. 若 $(X_j,\delta_j)_{j\ni J}$ 是不分明拓扑空间族，则 $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J}\delta_j)$ 是超不分明紧的当且仅当对所有的 $j\in J$，(X_j,δ_j) 是超不分明紧的。

证明：与定理 3·1 的证明相类似，只要用 ι 代替 ι_α、用〔5〕中的定理 1.5 代替命题 1·2 即可。

关于不分明紧性，文〔5〕已证明有乘积定理。

定理 3·4〔5〕若 $(X_j,\delta_j)_{j\in J}$ 是不分明拓扑空间族，则 $(\prod_{j\in J} X_j, \prod_{j\in J}\delta_j)$ 是不分明紧的当且仅当对所有的 $j\in J$，(X_j,δ_j) 是不分明紧的。

证明：见文〔5〕定理 1·6。

文〔5〕还证明了，有限乘积保持弱不分明紧性〔5 定理 1·7〕。并在一般情况下给出了反例。

4. 结　　论

现在我们把注意力限制于具有 Tychonoff 乘积性质的那些良扩张。即，(Ⅰ)、(Ⅳ)、(Ⅴ)、(Ⅶ) 和 (Ⅷ)。看一看存在于它们之间的哪些推断是对的，哪些推断是不对的。

若 (X,δ) 是超不分明紧的，因为对所有的 $\alpha\in I\setminus\{1\}$ 有 $\iota(\delta)\supset\iota_\alpha(\delta)$，由命题 1.1 显然可见，$(X,\delta)$ 是强不分明紧的。

若 (X,δ) 是强不分明紧的。则由定义、对任何 $\alpha\in I\setminus\{1\}$　(X,δ) 是 α—紧的。

强不分明紧性蕴函不分明紧性，而且甚至可以证明下述更一般的结果。

命题 4·1 若 D 是 I 关于通常拓扑的稠密子集，并且对于所有的 $\alpha\in D$，(X,δ) 是 α—紧的，则 (X,δ) 是不分明紧的。

证明：令 $\alpha_0>0, \beta\subset\delta$ 使得 $\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha_0$，取 $\alpha_0>\varepsilon>0$ 选取 $\alpha\in D$ 使得 $\alpha_0>\alpha\geqslant\alpha_0-\varepsilon$，则对所有的 $x\in X$ 有 $\sup_{\mu\in\beta}\mu(x)\geqslant\alpha_0>\alpha$　所以 β 是一个 α—荫蔽。从而存在一个有限 α—子荫蔽 β_0，于是 $\sup_{\mu\in\beta_0}\mu>\alpha\geqslant\alpha_0-\varepsilon$　这证明 (X,δ) 是不分明紧的。

综合上述论证有如下结论。

$$
\begin{array}{ccccc}
(\text{Ⅴ}) & \Longrightarrow & (\text{Ⅳ}) & \Longrightarrow & (\text{Ⅰ}). \\
 & & \Downarrow & & \\
 & & (\text{Ⅶ}) & &
\end{array}
$$

现在我们证明上图示中无论哪个箭头都不可逆。

反　例

令 $X=I$，对所有的 $x\in X$ 令 χ_x 表示 $\{x\}$ 的特征函数，对所有的 $x\in X\cap Q$，令 $x=p/q$ 为既约真分数并置

$$\overset{s}{\nu_x}=\frac{s}{q}+\frac{1}{q}\chi_x。对所有的 S\in N,\ 0\leq S\leq q-1$$

令　$\sigma_1=\{\chi_x:x\in X。且\ x\ 为无理数\}$

$\sigma_2=\{\overset{s}{\nu_x}:x\in X\cap Q,\ x=p/q,\ S\in N,\ 0\leq s\leq q-1\}$　令 δ 是由

$\sigma=\{\alpha:\alpha\ 为常数\}\cup\sigma_1\cup\sigma_2$

生成的 X 上的不分明拓扑。我们证明下面的结果

(X,δ) 是不分明紧的，并且对每个 $\alpha\in I\setminus\{1\}$，

$\iota_\alpha(\delta)$ 是 X 上的离散拓扑。

为证明这个结果，取 $\alpha_0\in I\setminus\{0\}$，$\beta\subset\sigma_1\cup\sigma_2$ 使得 $\sup_{\mu\in\beta}\mu\geqslant\alpha_0$，今对每个 $\mu\in\beta\cap\sigma_2$ 存在 $x_\mu=P_\mu/q_\mu$ 及 $S_\mu\in N$ 使得 $0\leq S_\mu\leq q_\mu-1$　且

$$\mu=\frac{S_\mu}{q_\mu}+\frac{1}{q_\mu}\chi_{x_\mu}$$

假设存在 $\varepsilon>0$ 使得对所有的 $\mu\in\beta\cap\sigma_2$，$\mu\ngeq\alpha_0-\varepsilon$ 那么这蕴函对所有的 $\mu\in\beta\cap\sigma_2$，$S_\mu/q_\mu<\alpha_0-\varepsilon$ 今选择 $x\in X\cap Q$ 使得 $x=p/q$ 同时 $q>1/\varepsilon$，则对所有的 $\mu\in\beta\cap\sigma_1$，$\mu(x)=0$，并且对所有的 $\mu\in\beta\cap\sigma_2$

$$\mu(x)=\frac{S_\mu}{q_\mu}+\frac{1}{q_\mu}X_{x_\mu}(x)=\frac{S_\mu}{q_\mu}<\alpha_0-\varepsilon\qquad 若\ x\neq x_\mu$$

$$\mu(x)=\frac{S_\mu}{q_\mu}+\frac{1}{q_\mu}\chi_{x_\mu}(x)$$

$$=\frac{S_\mu}{q}+\frac{1}{q}<\alpha_0-\varepsilon+\varepsilon=\alpha_0\qquad 若\ x=x_\mu$$

由于只有有限个 μ 使得 $q_\mu=q$，因此，$\sup_{\mu\in\beta}\mu(x)<\alpha_0$ 这是一个矛盾。于是对所有的 $\varepsilon>0$ 存在 $\mu\in\beta$ 使得 $\mu\geqslant\mu_0-\varepsilon$ 这论明 (X,δ) 是不分明紧的。

今对所有的 $\alpha\in I\setminus\{1\}$ 有

$\iota_\alpha(\delta)=\langle\{\mu^{-1}(\alpha,1]:\mu\in\sigma_1\cup\sigma_2\}\rangle$

若 $x\in X$ 是无理数，则 $\{x\}=\chi_x^{-1}(\alpha,1]\in\iota_\alpha(\delta)$。若 $x\in X\cap Q$ 则 $x=p/q$。由于 $\alpha<1$ 可选取 S 使得 $S-1/q\leqslant\alpha<S/q$，因此，$\nu_x^{s-1}\in\sigma_2$　且有

$$\nu_x^{s-1}(y)=\frac{S-1}{q}\leqslant\alpha\ 若\quad y\neq x$$

$$\nu_x{}^{S-1}(x)=\frac{S-1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{S}{q}>\alpha$$

于是 $(\nu_x{}^{S-1})^{-1}(\alpha,1]=\{x\}\in\iota_\alpha(\delta)$

这表明对所有的 $\alpha\in I\setminus\{1\}$，$\iota_\alpha(\delta)$是离散的。因对任何 $\alpha\in I\setminus\{1\}$，$(X,\delta)$都不是$\alpha$－紧的。同时这还表明不分明紧性不蕴函强不分明紧性或者对某个 $\alpha\in I/\{1\}$ 的 α—紧性。

由于 $\iota(\delta)=\sup\limits_{\alpha\in I}\iota_\alpha(\delta)$，这个例子还表明不分明紧性不蕴函超不分明紧性。

剩下来是要说明强不分明紧性不蕴函超不分明紧性。为此，取 $X=I$，令 δ 由$\{\chi_\emptyset\}\cup\{\alpha:\alpha$为常数$\}\cup\{\nu\in I^X:\nu(x)\leq x$，对所有的 $x\in X\}$生成，则有下面的结果。

(X,δ)是强不分明紧的，而不是超不分明紧的。实际上，对所有的$\alpha\in I\setminus\{1\}$有

$$\iota_\alpha(\delta)=\{\{0\}\}\cup\{X\}\cup\{A\subset(\alpha,1]\}$$

因此，$\iota_\alpha(\delta)$中的任何复盖必包含X，于是对于所有的 $\alpha\in I\setminus\{1\}$，$(X,\iota_\alpha(\delta))$是紧，而这就意味着$(X,\delta)$强不分明紧的。然而，易见，$\iota(\delta)=\sup\limits_{\alpha\in I}\iota_\alpha(\delta)$是离散的。因此，$(X,\delta)$不是超不分明紧的。

5. 结束语

虽然定义（Ⅱ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）和（Ⅶ）是良扩张，并且它们都有 Tychonoff 乘积性质。但要注意，在 Fuz 中的紧性与 Top 中相应的紧性等价这种意义下，概念（Ⅱ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）是拓扑的。事实上，(X,δ)是α—紧的当且仅当$(X,I_\alpha(\delta))$是紧的（命题1.1）。关于强不分明紧性简介如下：对所有的$\alpha<1$，令$X_\alpha=X$，由扑拓空间的 Tychonoff 定理可见，(X,δ)是强不分明紧的当且仅当$(\prod\limits_{\alpha\in I}X_\alpha,\prod\limits_{\alpha<1}\iota_\alpha(\delta))$是紧的。关于超不分明紧性，定义自身就表明$(X,\delta)$是超不分明紧的当且仅当$(X,\iota(\delta))$是紧的。关于概念（Ⅰ）和（Ⅱ）也有明显的拓扑特征。对于（Ⅱ），就是命题 1.1 所说的(X,δ)是 α^*—紧的当且仅当$(X,\iota_\alpha{}^*(\delta))$是紧的。对于（Ⅰ）说明如下：令$I_1=I\setminus\{1\}$，对所有的 $\mu\in\delta$ 置$G_\mu=\{(x,t)\in X\times I_1:0\leqslant t<\mu(x)\}$，容易验证$T_\delta=\{G_\mu:\mu\in\delta\}$是 $X\times I_1$ 上的一个拓扑，并且(X,δ)是拟不分明紧的当且仅当$(X\times I_1,T_\delta)$是紧的。此外，在每一种情况下，不分明拓扑空间与其相关联的拓扑空间之间是函子关系。有兴趣的读者可以去证明下述五个映射 T_1—T_5 实际是从 Fuz 到 Top 的函子。令(X,δ)及(Y,ν)是不分明拓扑空间。$f:(X,\delta)\longrightarrow(Y,\nu)$是不分明连续的。

关于拟不分明紧性有

$$T_1:\mathrm{Fuz}\sim\to\mathrm{Top}$$
$$(X,\delta)\longrightarrow(X\times I_1,T_\delta)$$

且
$$T_1(f):T_1(X,\delta)\longrightarrow T_1(Y,\nu)$$
$$(x,t)\longrightarrow(f(x),t)$$

关于 α—紧性（α^*—紧性）有

T_2: Fuz~→Top

$(X,\delta) \longrightarrow (X, \iota_a(\delta))$

(T_3: Fuz~→Top

$(X,\delta) \longrightarrow (X, \iota_a^*(\delta))$)

且　　$T_2(f) = T_3(f) = f$

关于强不分明紧性有

T_4: Fuz~→Top

$(X,\delta) \longrightarrow (\prod_{\alpha<1} X_\alpha, \prod_{\alpha<1} \iota_\alpha(\delta))$

（这里对所有的$\alpha<1$，$X_\alpha = X$）

且　　$T_4(f) = \prod_{\alpha<1} f_\alpha$

（这里，对所有的$\alpha<1$，$f_\alpha = f$）

关于超不分明紧性有$T_5 = \tilde{C}$　（见[4]）即

T_5: Fuz~→Top

$(X,\delta) \longrightarrow (X, \iota(\delta))$

且　　$T_5(f) = f$

参　考　文　献

1.C.L.Chang, Fazzy Topological Spaces J.Math.Anal.Appl.24(1968) 182—190

2.T.ε.Gantner, R.C.Steinlage, and R.H.Warren,Compactness in fuzzy topological spaces.to appear.

3.G.A.Gaguen, The Fuzzy TychonoFF thsorem J.Math.Anal.Appl. 43 (1973) 734—742

4.R.Lowen, Fuzzy topological spaces and Fuzzy Compactness. Math. Anal. Appl.56(1976) 621—633

5.R. Lowen. Initial and fianl fuzzy topologies and Fuzzy TychonoFF theorem J.Math.Anal.Appl.58 (1977) 11—21

6.R.H.Warren, Neighlorhoods,bases and continunty in Fuzzy topological spaces, to appear.

7.C.K.Wong,Covering pzoperties of fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 43(1973) 677—704

8.L.a.zadeh, Fuzzy sets, Inf. Contr.8(1965) 338—353

（本文译自 J.Math.AnaL, AppL. 64(1978) 446—454）

（赵万忠译）

不分明拓扑空间中的分离公理

Bruce HUtton and Ivan Reilly

1. 引　　言

随着 Zadeh 在经典论文〔14〕中引入不分明集概念之后，许多论文曾考虑了不分明拓扑空间的一般理论，如 C.L.Chang 在〔1〕一文中所介绍的。在我们以前的几篇文章中，我们发展了正规性与不分明单位区间〔4〕，一致性与完全正则性〔5〕，正则性公理系〔7〕等概念，并且发展了积空间与紧微性的新的（而且我们认为更为满意的）定义〔6〕，它与以前〔3〕、〔11〕、〔13〕中所定义的不同。本文对〔7〕作了改进，并将正则性公理安排在前后有关合适位置上。这种形式与我们前面的形式之间的主要差别是我们现在修改了 T_0（因而当 $i>0$ T_i）的定义（我们正准备写关于紧化的一篇论文）。并且利用我们的紧性与乘积的新定义能使我们证明更好的结果。

对于述语与记号的解释这里不再定义了，可见关于乘积的论文〔6〕，并见我们的其他论文〔4〕与〔5〕。

2. 予备知识

在本文中 L 为一不分明格，即 L 为一个具有反序对合“,”的完备的完全分配格。τ 为 L上的一个拓扑（即L的一个子集在取任意上确界与有限下确界的意义下是封闭的）。当谈到不分明集（L的元）时，我们常略去“不分明”字样。$\overline{A}$表示A的闭包，A°*表示内部。本文与其前面的那篇文章〔7〕的区别是所有定义都是非点的定义，意思是它们仅依赖于 L 的格结构、并不依赖于形如 M^X 的任何分解，其中 M 为一不分明格，而 X 为一集。和以前一样，它们是标准拓扑定义的推广。

3. T_0

定义： 如果$\mathcal{V}$ 是包含$\mathcal{U}$ 的 L 的最小子集，而且在任意的 $\vee$ 和 $\wedge$ 之下是闭的，则我们说$\mathcal{U}\subseteq$L生成$\mathcal{V}\subseteq$L。

命题 1. 由$\mathcal{U}$ 生成的不分明集族是形如

$$A=\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}$$ 其中 $\{U_{ij}: i\in I, j\in J_i\}\subseteq\mathcal{U}$的不分明集族。

* 译者注 原文中是A，我们按该文后面所用的符号改为A°

证明： 由 L 的完全分配性可得到。

定义(T_0).如果 L 是由 $\tau\bigcup\sigma$（这些集是开的或闭的）生成的不分明集族，则（L,τ）是 T_0。

等价地，每个不分明集 $A\in L$ 可写成形式

$A=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}$　其中 U_{ij} 是开集或闭集。

记号：　令

L_τ = 由 τ（= 开集）生成的不分明集族；

L_σ = 由 τ（= 闭集）生成的不分明集族；

$L_{\tau\sigma}$ = 由 $\tau\bigcup\sigma$（开集或闭集）生成的不分明集族。

命题 2. 假设 $\{(L_\lambda,\ \tau_\lambda):\ \lambda\in\wedge\}$ 为一不分明扑拓空间族，则

$L=\bigotimes_\lambda L_\lambda$ 是 T_0 的充要条件是对每个 $\lambda\in\wedge$ L_λ 是 T_0。

证明：（$\Longleftarrow$）假设每个 L_λ 是 T_0，则对于 $A\in L_\lambda$ 形式为 $\pi_\lambda^{-1}(A)$ 的每个元素是由形式为 $\pi_\lambda^{-1}(k)$ 的集合产生，其中 k 是一个在 L_λ 内的开的或闭的集合。但是，对于 $A\in L_\lambda$，$\lambda\in\wedge$ 形式 $\pi_\lambda^{-1}(A)$ 的集合产生 L 的全部元素，这就证明了这个结果。

（$\Longrightarrow$）假设 L 是 T_0，即对于 $A\in(L_\lambda)_{\tau\sigma}$ 形式 $\pi_\lambda^{-1}(A)$ 的不分明集合产生 L。由此每个不分明集合 k 是形式 $\Pi_\lambda U_\lambda$ 的"箱"（*box*）集的上确界，其中 $U_\lambda\in(L_\lambda)_{\tau\sigma}$。特别是考虑对于一个给定的 $\lambda\in\wedge$，$K=\pi_\lambda^{-1}(A)$ 的情况。则 $K=\bigvee_i U_i$ 其中 $U_{i\lambda}\in(L_\lambda)_{\tau\sigma}$，因而 $A=\pi_\lambda(k)=\bigvee_i(U_i)=\bigvee_i U_{i\lambda}\in(L_\lambda)_{\tau\sigma}$，所以（$L_\lambda$，$\tau_\lambda$）是 T_0。

4. R_0 和 T_1^*

定义（R_0，T_1）。如果每个开集是闭集的上确界，则(L,τ)是R_0。如果(L,τ)是 R_0 和 T_0，则(L,τ)是 T_1。

命题 3. (a) R_0 等价于

(1) 在 $L_{\tau\sigma}$ 内的每个不分明集合是闭集的上确界。

(2) $L_\tau=L_\sigma=L_{\tau\sigma}$。

(b) T_1 等价于

(1) 每个不分明集合是闭集的上确界。

(2) $L_\tau=L_\sigma=L$

证明： 显然的。

命题 4. $T_1\Longrightarrow T_0$。

命题 5.

(a) $\bigotimes_\lambda L_\lambda$ 是 $R_0\Longleftrightarrow$ 对每个 λ L_λ 是 R_0。

(b) $\bigotimes_\lambda L_\lambda$ 是 $T_1\Longleftrightarrow$ 对每个 λ L_λ 是 T_1。

证明：(a)($\Longleftarrow$)像在命题 2 中一样，$\pi_\lambda^{-1}(\tau)$ 的每个元素是闭集的上确界，并且 $\{\pi_\lambda^{-1}(\tau)$：

---

* 关于标准拓扑定义[2]。

$\lambda\in\wedge$ } 产生扑拓，即闭集产生了开集。

(*a*)($\Longrightarrow$)又如命题2，每个开集是形式 $\Pi_\lambda U_\lambda$ 的"箱"集的上确界，其中 $U_\lambda\in(L_\lambda)_\tau$。再取投影给出这个结果。

(*b*)由(*a*)和命题2得到。

5 . R_1和T_2

定义 (R_1, T_2)。如果每个开集U可以写成形式 $U=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}\overline{U}_{ij}$

其中 U_{ij} 是开集，则(L,τ)是R_1。

如果(L,τ)是R_1和T_0，则元是T_2。

在〔5〕的引理1中我们证明了对任何 $A\in L$ 存在$\mathscr{B}\subseteq L$ 使得 $\sup\mathscr{B}=A$ 并且对任何$\mathscr{C}\subseteq L$ 使得 $\sup\mathscr{C}=A$。我们有$(\forall B\in\mathscr{B})(\exists C\in\mathscr{C}|(B\leq C)$。我们称这样的集合 $\mathscr{B}$ 是A的原子状的分解。

引理 6. 如果 $\mathscr{B}\subseteq L=\otimes_\lambda L_\lambda$是$\Pi_\lambda A_\lambda$的一个原子状分解，则$\mathscr{B}_\lambda=\{\pi_\lambda(B); B\in\mathscr{B}\}$是 $A_\lambda\neq 0$ 的一个原子状分解。

反之，如果$\mathscr{B}_\lambda$是 A_λ 的一个原子状的分解，那末 $\Pi_\lambda\mathscr{B}_\lambda=\{\Pi_\lambda B_\lambda: B_\lambda\in_\lambda\mathscr{B}\}$是$\Pi_\lambda A_\lambda$的一个原子状的分解。

证明： 第一部分是真的。因为如果 $\mathscr{C}_{\lambda_0}\subseteq L_{\lambda_0}$满足 $\text{Sup}\mathscr{C}_{\lambda_0}=A_{\lambda_0}$，那末 $\mathscr{C}$满足 $\sup\mathscr{C}=\Pi_\lambda A_\lambda$，其中$\mathscr{C}$是箱$\Pi_\lambda C_\lambda$ 的集族使得 $C_{\lambda_0}\in\mathscr{C}_{\lambda_0}$和$C_\lambda=A_\lambda$ 对于$\lambda\neq\lambda_0$。

因此，对于每个 $B\in\mathscr{B}$，存在一个 $C\in\mathscr{C}$使得$B\leqslant C$，就蕴含着 $\pi_{\lambda_0}(B)\leqslant C_{\lambda_0}$。证完。

现在证明逆定理。取 $B_\lambda\in\mathscr{B}_\lambda$，那末 $D_\lambda=\sup\{D\leq A_\lambda: B_\lambda\not\leqslant D\}$ 满足 $D_\lambda\not\leqslant A_\lambda$。假设$\mathscr{C}\subseteq L$ 满足 $\sup\mathscr{C}=\Pi A_\lambda$，虽然 $\Pi_\lambda B_\lambda\not\leqslant C$，对于所有 $C\in\mathscr{C}$。不失一般性，$\mathscr{C}$是箱集合族，并且也对任何何 $C\in\mathscr{C}$，存在一个 λ，使得 $B_\lambda\not\leqslant C_\lambda$，则 $C_\lambda\leqslant D_\lambda$。但是，箱集合 $\Pi_\lambda C_\lambda\leqslant\Pi_\lambda A_\lambda$的族D，使得 $C_\lambda\leqslant D_\lambda$对某些 λ 是在 $\otimes_\lambda L_\lambda$内的集（因为在(p1)和(p2)之下是封闭的，其中(p1)、(p2)是在〔6〕中的 $\otimes_\lambda L_\lambda$的元素的定义条件下）*.

因此，$\sup\mathscr{C}\leqslant D\neq\Pi A_\lambda$ 矛盾。于是，存在一个C使得$\Pi_\lambda B_\lambda\leqslant C$。

也当然，$\sup\Pi_\lambda B_\lambda=\Pi_\lambda A_\lambda$的充要条件是 $\sup B_\lambda=A_\lambda$. 证完。

注6.1. 如果$\{A_m\}$是U的原子状的分解，并且$\{B_n\}$是U的对偶的原子状的分解（即$\{B_n'\}$是U'的原子状的分解），那末存在开集U_{ij}，使得$U=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}\overline{U}_{ij}$。等价的说法是对每个 A_m、B_n有一个开集 V_{mn}使得 $A_m\leqslant V_{mn}\leq\overline{V}_{mn}\leqslant B_n$。这证明本质上是显然的。

命题 7. (*a*)R_1等价于

(1)在 $L_{\tau\sigma}$ 内的每一个不分明集U，可以写为下列形式

$$U=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}U_{ij}=\bigvee_i\bigwedge_{j\in J_i}\overline{U}_{ij}$$

* $\Pi_\lambda C_\lambda$看成$\{\Pi_\lambda K_\lambda: K_\lambda\leqslant C_\lambda$对每个$\lambda\in\Lambda\}$，即集合与它的箱子集族一样，我们希望不发生混淆。

其中 U_{ij} 是开的。

(2)在 $(L\otimes L)_{r_0}$ 中比对角线Δ大的最小的不分明集合是闭的。（Δ是在L⊗L内的不分明集，它对应于在〔6，命题6〕中所定义的同构

θ：$L\otimes L \longleftrightarrow$ {保上确界的映射 φ：$L\longrightarrow L$} 之下保上确界映射 Δ：$L\longrightarrow L$，其中对于 $A\in L$，$\Delta(A)=A$。即

$\Delta'=\{(A,B): A,B\subset L$ 和 $A\leq B'\}$）。

(b) T_2 等价于

(1)每个不分明集可以写成上面给出的形式（在 R_1 的定义中）。

(2)对角线 Δ 是闭的。

证明：$R_1(T_2)$ 同(a)(1)（(b)(1) resp）的等价是显然的。我们仅去证明 T_2 同(b)(2)的等价。因为 R_1 同(a)(1)的等价仅仅是技术的变化。

（⟹）我们将证明 Δ′ 是开的。考虑 $A\in L$，那末由 T_2，$A=\bigvee_i\bigwedge_j U_{ij}=\bigvee_i\bigwedge_j \overline{U}_{ij}$

其中 U_{ij} 是开的。现在 $(U_{ij},\overline{U}'_{ij})$ 表示开集。而且 $(A,A')\leqslant\bigvee_{ij}(U_{ij},\overline{U}'_{ij})\leqslant\Delta'$，

第二个不等式由Δ′定义得到的。第一个不等式推导如下：

$$\bigvee_{ij}(U_{ij},\overline{U}'_{ij})\geqslant\bigvee_{ij}(\bigwedge_K U_{ij},\ \overline{U}'_{\ j})$$

$$=\bigvee_i(\bigwedge_j U_{ij},(\bigwedge_j \overline{U}_{ij})')$$

$$\geqslant\bigvee_i(\bigwedge_j U_{ij},\bigwedge_{il}(\bigwedge_j \overline{U}_{ij})'),$$

$$=(\bigvee_i\bigwedge_j U_{ij},(\bigvee_i\bigwedge_j(\overline{U}_{ij})')$$

$$=(A,\ A')。$$

因此 $(A,\ A')\leqslant \mathrm{Int}\Delta'$。但是 $\Delta'=\sup\{(A,\ A'): A\in L\}$。
所以Δ′是开的。

（⟸）假设 Δ′ 是开的，且 A 是一不分明集。那末我们可以得到 A 的"原子状"的分解 $A=\bigvee_i A_i$ 与对偶的"原子状"的分解 $A=\bigwedge_j B_j$（由〔6〕中的引理1）。

由引理6，$\{(A_i,\ B'_j)\}$ 是 (A,A') 的一个"原子状"分解，因为 Δ′ 是开的，它是"箱"的上确号，并且因为 $\{(A_i,B'_j)\}$ 是原子状的，这些开箱的一个必须大于 (A_i,B'_j)。因此 $(A_i,B'_j)\leqslant(U_{ij},F'_{ij})\leq\Delta'$，其中 U_{ij} 是开的，F_{ij} 是闭的。即 $A_i\leqslant U_{ij}\leqslant F_{ij}\leqslant B_j$。现在 $A=\vee A_i=\wedge B_j$，因而 $A=\bigvee_i A_i\leqslant\bigvee_i\bigwedge_j U_{ij}\leqslant\bigwedge_j\bigvee_i F_{ij}\leqslant\wedge B_j=A$，这就证明了结果。

注7.1 我们还不知道是否存在用滤集的极限唯一性表达 T_2 的特微。事实上，我们甚至还没有滤集收敛的定义。

命题 8. $R_1\Longrightarrow R_0$，$T_2\Longrightarrow T_1$。

证明：显然的。

命题 9. (*a*) $L=\otimes_\lambda L_\lambda$ 是 $R_1 \Longleftrightarrow$ 对每个 λ，L_λ 是 R_1，

(*b*) $L=\otimes_\lambda L_\lambda$ 是 $T_2 \Longleftrightarrow$ 对每个 λ，L'_λ 是 T_2。

证明：陈述(*b*)由(*a*)和命题2立即得到。因此我们仅证明(*a*)。

($\Longleftarrow$)假设每个 L_λ 是 R_1，于是每个形为 $\pi_\lambda^{-1}(U)$ 的开集（其中 U 是在 L_λ 内的开集）能写成所要求的形式。但是，这些集合产生全部开集，因此 L 是 R_1。

($\Longrightarrow$)假设 $U=\pi_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$ 其中 $U_{\lambda_0}\in\tau_{\lambda_0}$。令 $\mathscr{A}_\lambda=\{A_{\lambda i}: i\in I\}$ 是一个 $1\in L_\lambda$ 的原子状分解。那末存在 $i,j\in I$ 使得 $A_{\lambda i}\not\leqslant A'_{\lambda j}$。这是因为如果对每个 $i,j\in I$，$A_{\lambda i}\leqslant A'_{\lambda j}$，那末 $\bigvee_i A_{\lambda i}\leqslant\bigwedge A'_{\lambda j}$ 即 $1\leq 0$，这是矛盾。（我们可以假设 L_λ 多于一个元素，因为否则命题是显然的）。因此，选择 $B_\lambda, C_\lambda\in\mathscr{A}_\lambda$ 对于 $\lambda\neq\lambda_0$，使得 $B_\lambda\not\leqslant C'_\lambda$。

假设 B_{λ_0} 是 U_{λ_0} 的原子状分解的元素，并且 C'_{λ_0} 是 U_{λ_0} 的对偶的原子状分解的元素。那末由引理6和注6.1我们可以找到一个开集 V（V是开箱不失一般性），使得 $\Pi_\lambda B_\lambda\leqslant V\leqslant\overline{V}\leqslant(\Pi_\lambda C'_\lambda)'$。那末，利用〔6〕中余集的定义，我们有 $\overline{V}_\lambda\leqslant C'_\lambda$ 对于某些 $\lambda\in\Lambda$。但是 $B_\lambda\leqslant\overline{V}_\lambda\leqslant C'_\lambda$ 对于 $\lambda\neq\lambda_0$ 是错误的（因为 $B_\lambda\not\leqslant C'_\lambda$），并且因此 $\overline{V}_{\lambda_0}\leqslant C'_{\lambda_0}$，即 $B_{\lambda_0}\leqslant V_{\lambda_0}\leqslant\overline{V}_{\lambda_0}\leqslant\overline{V}_{\lambda_0}\leqslant C'_{\lambda_0}$，这就是以证明 L_{λ_0} 是 R_1（因为 B_{λ_0}、C_{λ_0} 是任意的）。

命题 10. 设 (L,τ) 是 T_2 并 A 是 L 中的不分明集。对于 A 的每个开复盖有一个有限子复盖（即在相当弱的意义内 A 是"紧的"，那末 A 是一个闭不分明集。*

证明：令

$$A=\bigwedge_i\bigvee_{j\ni J_i}U_{ij}=\bigwedge_i\bigvee_{j\in J_i}\overline{U}_{ij},$$

则 $\{V_{ij}: j\in J_i\}$ 是 A 的一个开复盖，因此有一个有限子复盖 $\{U_{ij_1},\cdots,U_{ij_n}\}$ 使得

$$A\leqslant U_{ij_1}\vee\cdots\vee U_{ij_n}\leqslant\overline{U}_{ij_1}\vee\cdots\vee\overline{U}_{ij_n}。$$

右边是闭集，比如称为 K_i，于是

$$A\leqslant K_i\leqslant\bigvee_{j\ni J_i}U_{ij}$$

蕴含着

$$A\leq\bigwedge_i K_i\leq\bigwedge_i\bigvee_j\overline{U}_{ij}=A$$

因此 $\quad A=\bigwedge_i K_i\quad$ 是闭的

命题 11. 设 (L,τ) 是 T_2，$k\leqslant U$ 且 k,U' 是"紧的"即每个开复盖有一个有限子复盖，那末存在一个不分明集 V，使得 $k\leq V^\circ\leq\overline{V}\leq U$。

证明：记 $k=\bigwedge_i\bigvee_j U_{ij}=\bigwedge_i\bigvee_j\overline{U}_{ij}$。那末对于每个 i，$k\leqslant\bigvee_j U_{ij}\leqslant\bigvee_j\overline{U}_{ij}$。取一个有限子复盖。我们得到 $k\leqslant V_i\leqslant\overline{V}_i\leqslant\bigvee_j\overline{U}_{ij}$，其中 $V_i=U_{ij_1}\vee\cdots\vee U_{ij_n}$ 是有限子复盖的并。那末 $k=\bigwedge V_i=\bigwedge\overline{V}_i\leq U$。因此，$\{\overline{V}'_i\}$ 是 U' 的一个有限子复盖。于是取一个 $\{\overline{V}_i\}$ 的有限 $\wedge$ 给出 V，使得 $k\leqslant V^\circ\leqslant\overline{V}\leqslant U$。

---

* 比较〔6，4节〕。

6. 正则的和T_3

定义（R，T_3）。如果每个开集U是开集的上确界，它的闭集小于U，则（L，τ）是正则的（R）。

如果（L，τ）是正则的和T_0，则它是T_3。

命题 12. 正则的$\Longrightarrow R_1$；$T_3 \Longrightarrow T_2$。

命题 13. (a) $L=\otimes_\lambda L_\lambda$是正则的充要条件是每个$L_\lambda$是正则的。

(b) $L=\otimes_\lambda L_\lambda$是$T_3$的充要条件是每个$L_\lambda$是$T_3$。

证明：显然(b)由(a)可得到。因此只证明(a)。

（$\Longleftarrow$）设每个L_λ是正则的。在L中每个开集是形式ΠU_λ的开"箱"型集合的上确界，其中U_λ是在L_λ中的开集，且除去有限个所有的U_λ都等于1。我们可以写出：

$$U_\lambda=\bigvee_{i_\lambda\in I_\lambda} U_{\lambda,i\lambda}$$

其中$\overline{U}_{\lambda,i}\leq U_\lambda$（这里如果$U_\lambda=1$我们选择$U_\lambda,i=1$）。因此令$U_i=\Pi_\lambda U_{\lambda,i\lambda}$，其中$i\in I=\Pi_\lambda I_\lambda$。那末$\bigvee_i U_i=U$，且$\overline{U}_i\leq\Pi_\lambda\overline{U}_{\lambda,i\lambda}\leq U$。这就对"箱"型集合证明了结果。取箱型集合的上确界就得到结果。

（$\Longrightarrow$）设L是正则的，那末考虑$U=\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$对于给出的$U_\lambda\in\tau_\lambda$。那末U是一个开集的上确界，它的闭包小于或等于U。我们可以假设这些开集是箱集合。不难证明（利用〔6〕中余集定义）$\overline{\Pi_\lambda F_\lambda}=\Pi\overline{F}_\lambda$因此对一个箱集合$U_i$，$\overline{\pi_\lambda(U_i)}\leq U_\lambda$的充要条件是$U_i\leq U$。即$\{\pi_\lambda(U_i)\}$是去证明$L_\lambda$的正则性的适当的一个开集族。

7. 完全正则的和$T_{3\frac{1}{2}}$

定义$\left(CR, T_{3\frac{1}{2}}\right)$。如果对于每个开集U，存在集族$\{U_i : i\in I,\ t\in[0,1]\}$使得$\bigvee_i U_i=U$且$t<s\Longrightarrow\overline{U}_t\leq\dot{U}_s\leq U$。则（L，τ）是完全正则的。

如果（L，τ）是完全正则的和T_0，则它是$T_{3\frac{1}{2}}$。

7.1. 不分明单位区间

由于技术的理由，在以后的几篇论文中，我们将稍微修改由〔4〕和〔5〕给出的定义中的不分明单位区间〔0，1〕(L)的定义。我们说不分明单位区间〔0，1〕(L)是全部单调增加映射$\lambda: R\to L$的集合，对于

$$\lambda(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>1\end{cases}$$

将λ等价分类，$\mu: R\to L$，如果$\lambda(t+)=\mu(t+)$，$\lambda(t-)=\mu(t-)$对于$t\in R$。对于$t\in R$，如果$\mu(t-)\leq\lambda(t-)$且$\mu(t+)\leq\lambda(t+)$，则用$\lambda\leq\mu$定义在〔0，1〕(L)上的序。我们用$L_t(\lambda)=\lambda(t-)$，$R_t(\lambda)=\lambda(t+)$'定义L_t:〔0，1〕(L)$\to$L和R_t:〔0，1〕(L)$\to$L。

L_t和R_t在$[0,1](L)$的不分明集的格中产生开集（一个不分明集是一个映射$\mathscr{S}:[0,1](L)\to(L)$）。这样相应$[0,1](L)$的新定义和老定义之间是由$\lambda':R\to L$替换$\lambda:R\to L$（其中$\lambda'(t)=\lambda(t)'$）。

命题 14.如果（L^X,τ）是一个不分明拓扑空间（其中L是一个不分明格，X是普通集），那末完全正则性等价于：

"对于每个开集$U\in\tau$，存在连续函数$f_i:X\to[0,1](L)$使得

$$\sup_i f_i^{-1}(R_i')=\sup_i f_i^{-1}(L_i)=U"$$

（即$\sup_i f_i(x)(0+)=\sup_i f_i(x)(1-)=U$对于每个$\chi\in X$——注意这里我们涉及普通函数如[4]和[5]中所用的。当然诱导出在[6]的意义中的同态）。

命题 15.完全正则性等价于：

(1)（L,τ）是可单值化的；

(2) 考虑全部保序映射$f:[0,1]\to L$，使得$f(t-)\in\tau$，并且$f(t+)\in\tau'$。那末τ是全部拓扑τ^*的最弱的拓扑使得$f(t-)\in\tau^*$且$f(t+)\in\tau^*$，对于像上面的所有f。

证明：与(1)的等价性在[5]中已有证明。与(2)等价本质上是显然的。

命题 16.完全正则的$\Longrightarrow$正则的，$T_{3\frac{1}{2}}\Rightarrow T_3$。

引理 17.设U是一个开集，且$\Pi_\lambda A_\lambda$是U的箱子集。设B_λ是对于$\lambda\neq\lambda_0$相对于A_λ的原子状的。（即对于任何$\mathscr{C}$使得$\sup\mathscr{C}=A_\lambda$，$\exists C\in\mathscr{C}$使得$B_\lambda\leq C$）。那末最大的箱集$V\leqslant U$使得$V_\lambda=B_\lambda$对于$\lambda\neq\lambda_0$。有$V_{\lambda_0}$是开的。

证明：假设B_{λ_0}关于V_{λ_0}是原子状的，那末$\Pi_\lambda B_\lambda$关于U是原子状的。并且因为有U是开箱集的上确界，存在一个开箱W，使得$\Pi_\lambda B_\lambda\leqslant W$。所以$B_{\lambda_0}\leqslant W_{\lambda_0}\leqslant V_{\lambda_0}$。但是全部可能的$B_{\lambda_0}$的上确界是$V_{\lambda_0}$，所以$\sup B_{\lambda_0}=\sup W_{\lambda_0}=V_{\lambda_0}$，即$V_{\lambda_0}$是开的。

命题 18.$L=\otimes_\lambda L_\lambda$是完全正则的充要条件是对每个$\lambda$，$L_\lambda$是完全正则的（对$T_{3\frac{1}{2}}$也是如此）。

证明：（$\Longleftarrow$）类似于上述关于积的证明。

（$\Longrightarrow$）假设有一个在L内的开集族$\{U_t;t\in[0,1]\}$使得$t<s$蕴含着$\overline{U}_t\leqslant U_s$。又假设$O\neq\Pi_\lambda A_\lambda\leqslant U_0$。那末挑选对于$\lambda\neq\lambda_0$关于$A_\lambda$原子状的$B_\lambda\neq O$。令$V_t$是最大的箱集，使得$V_t\leqslant U_t$，并且对于$\lambda\neq\lambda_0$ $V_{t\lambda}=B_\lambda$。那末由引理17，$W_t=V_{t\lambda_0}$是开的。进而因为$V_t\leqslant U_s$有$\overline{V_t}\leqslant\overline{U_t}$并且所以对于$t<s$ $\overline{V}_{t\lambda_0}\leqslant V_{s\lambda_0}$（因为$V_t$是箱集，且$\overline{U_t}\leqslant U_s$）。现在因为$W_t=V_{t\lambda_0}$对于$t<s$我们有$\overline{W}_t\leq W_s$。

这完成了证明的大部分技巧。假设L是完全正则的，并且$U=\pi_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$其中$U_{\lambda_0}\in\tau_{\lambda_0}$。那末存在箱集$A_i=\Pi_\lambda A_{i\lambda}$使得$\sup A_i=U$和开集族$\{U_{it}:t\in[0,1]\}$使得$A_i\leqslant U_{it}\leqslant U$且$t<s\Rightarrow U_{it}\leq U_{is}$。应用上节就得出开集族$\{W_{it}:t\in[0,1]\}$使得$A_{i\lambda_0}\leqslant W_{it}\leqslant U_{\lambda_0}$，且$t<s\Rightarrow\overline{W}_{it}\leqslant W_{is}$。因为$U_{\lambda_0}$是任意的，并且$\sup A_{i\lambda_0}=U_{\lambda_0}$，我们证明了对于$L_{\lambda_0}$的完全正则性。

8.正规性和T_4

定义（N,T_4）。（见[4]）。如果对于任何闭集K和开集U使得$K\leqslant U$，存在一个集U，

使得

$K \leqslant V^{\circ} \leqslant \overline{V} \leqslant U$，则（L，τ）是正规的。

如果（L，τ）是正规的和T_0且R_0，则它是T_4。

在〔4〕中我们证明过

命题 19.如果（L^x，τ）是一个不分明拓扑空间，其中L是一个不分明格，X是普通集。那末正规性等价于：

对于在L^x中的每个闭集U，使得$K \leqslant U$，存在一个连续函数$f: X \to [0,1](L)$，使得$K \leqslant f^{-1}(R_0') \leqslant f^{-1}(L_1) \leqslant U$（即$K(x) \leqslant f(x)(0+) \leqslant f(x)(1-) \leqslant U(x)$ 对任何$x \in X$）。

这个命题的"无点"的形式是：

命题 20.（L，τ）是正规的充要条件是对于在L内的每个闭集K和开集U，使得$K \leqslant U$，存在$\{V_t: t \in [0,1]\}$使得$V_0 = K$，$V_1 = U$且（$t < s \Rightarrow \overline{V}_t \leqslant V_s^{\circ}$）。

命题 21.正规的和$R_0 \Longrightarrow$完全正则的。$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$。

证明：由命题20可得到。

命题 22.正规性不是产生的（productive）。

证明：由普通拓扑的反倒可得到。

命题 23.假设L是紧的，意思是一个闭集的每一个开复盖有一个有限子复盖。那末如L是R_1则它是正规的。

证明：由命题11可得到。

9.完全正规性和T_5

定义（CN，T_5）。如果对于任何不分明集K，U使得$R \leqslant U$且$K \leqslant U^{\circ}$，存在一个集V使得$K \leqslant V^{\circ} \leqslant \overline{V} \leqslant U$，则（L，τ）是完全正规的。

如果（L，τ）是完全正规的和T_0且R_0，则它是T_5。

命题 24.完全正规的$\Longrightarrow$正规的。

10.完备(perfectly)正规性和$T_{5\frac{1}{2}}$

定义（PN，$T_{5\frac{1}{2}}$）。如果（L，τ）是正规的并且每个闭集是可数个开集的$\wedge$，则（L，τ）是PN。

如果（L，τ）还是T_1，则它是$T_{5\frac{1}{2}}$。

命题 25.完备正规性等价于：

对于每个闭集K和开集U，使得$K \leqslant U$，存在$\{V_t: t \in [0,1)\}$，使得($t < s \Rightarrow \overline{V}_t \leqslant V_s$)且$K = V_0 \leqslant V_{1-} = U$。

或者关于（L^x，τ）所指出的情况而言，存在一个连续函数$f: X \to [0,1](L)$，使得$K = f^{-1}(R_0') \leqslant f^{-1}(L_1) = U$。

命题 26.完备正规的⟹完全正规的。

证明： 令（L，τ）是PN，并且$K\leqslant U^{\circ}$和$\overline{K}\leqslant U$。

令$\overline{K}=\bigwedge_{n=1}^{\infty}G_n$和$U^{\circ}=\bigvee_{m=1}^{\infty}F_m$，其中每个$G_n$是开的，每个$F_m$是闭的，由正规性，对每个m得到一个集$A_m$使得$F_m\leqslant A_m^{\circ}\leqslant\overline{A}_m\leqslant U$，并且对每个n有集$B_n$，使得$K\leqslant B_n^{\circ}\leqslant\overline{B}_n\leqslant G_n$。令$U_n=A_n\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{n}B_j\right)$且$W_m=\overline{B}_m\vee\left(\bigvee_{j=1}^{m}\overline{A}_j\right)$，那末$V_n\leqslant W_m$对所有m和n，$V_n$是开的，$W_m$是闭的。现在令$V=\bigvee_{n=1}^{\infty}V_n$和$W=\bigwedge_{m=1}^{\infty}W_m$，那末$V\leqslant W$，V是开的，W是闭的。进而

$$K\leqslant U^{\circ}\wedge\overline{K}=\left(\bigvee_{m=1}^{\infty}F_m\right)\wedge_s\overline{K}=\bigvee_{m=1}^{\infty}(F_m\wedge\overline{K})\leqslant\bigvee_{m=1}^{\infty}V_m=V$$

和

$$W=\bigwedge_{n=1}^{\infty}W_n\leqslant\bigwedge_{n=1}^{\infty}(F_n\vee U^{\circ})=\left(\prod_{n=1}^{\infty}G_n\right)\vee U^{\circ}=K\vee U^{\circ}\leqslant U.$$ 如所要求的。

11.伪可度量性和可度量性

定义（ΨM，T_6）。如果（L，τ）有一致性并具有对称元素的基｛D_r：r是正实数｝，满足$D_r\circ D_s\leqslant D_{r+s}$。并且这个一致性产生拓扑，则（L，τ）在它上面有一个伪度量。

如果（L，τ）还是T_0，则它是可度量的（T_6）。（我们希望在以后的一篇论文中进一步发展这些概念）。

命题 27.伪可度量的⟹完备正规的；

可度量的⟹$T_{5\frac{1}{2}}$。

证明： 首先证明正规性。假设$K\leqslant U$。K是闭的，U是开的。应用〔5〕的引理1，我们得到一个K的原子状划分$\{K_i\}$，即$K=\vee K_i$。由〔5，引理2〕余的说法得出$U=\wedge_j U_j$。因为U是开的，对每个i，有一个D_{r_i}使得$D_{r_i}(K_i)\leqslant U$。同样，对于每个j，有一个D_{s_j}使得$D_{s_j}(U_j')\leqslant K'$。并且也因为$D_{s_j}$是对称的$D_{s_j}(K)\leqslant U_j$。于是对每个i和每个j有$D_{r_i}(K_i)\leqslant U_j$和$D_{s_j}(K_i)\leqslant U_j$。特别地，$D_{\frac{1}{2}(r_i+s_j)}(K_i)\leqslant U_j$，因而$D_{\frac{1}{2}s_j}(D_{\frac{1}{2}r_i}(K_i))\leqslant U_j$对每个i所以$D_{\frac{1}{2}s_j}(\bigvee_i D_{\frac{1}{2}r_i}(K_i))\leqslant U_j$。并且因而$\bigwedge_j D_{\frac{1}{2}s_j}(\vee_i D_{\frac{1}{2}r_i}(K_i))\leqslant U$。现在$W=i_j$。$D_{\frac{1}{2}r_i}(K_i)$是K的一个邻域。因为$D_{\frac{1}{2}r_i}(K_i)$是$K_i$的邻域，进而$D_{\frac{1}{2}s_j}(W)\geqslant D_{\frac{1}{4}s_j}(W)$，因而有一个集合V，使得$K\leqslant V^{\circ}\leqslant\overline{V}\leqslant U$。

我们现在来证明，任何闭集K是G_δ。再由〔5〕引理1余的说法，$K=\wedge W_i$。对每个i有一个D_r使得$D_r(W_i')\leqslant K'$，因为K′是开的。所以$D_r(K)\leqslant W_i$。现在$s<r$蕴含着$D_s(K)\leqslant D_r(K)^{\circ}$，即$\bigwedge_{r>0}D_r(K)^{\circ}=K$。特别地，$K=\bigwedge_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}(K)^{\circ}$。

命题 28. $L=\bigotimes_{n=1}^{\infty} L_n$是可伪度量化的，如果$L_n$对每个n是可伪度量化的。

证明：在每个L_n上给一个具有可数基的一致性 $\mathscr{D}_n$，我们就可以在L上构造也具有可数基的该一致性如下：

已知$D\in\mathscr{D}_n$，在L上用$D^*=\pi_n^{-1}\cdot D\cdot\pi_n$定义$D^*$。于是$\mathscr{D}_n$的“拉回”（*Pullback*）将在$L$上用“拉回”$\tau_n$。产生拓扑。

令$\mathscr{D}$是由$\mathscr{D}_n$的“拉回”，对所有$\mathscr{D}_n$所产生的一致性。对每个$\mathscr{D}_n$可数基将产生$\mathscr{D}$的可数子基。同样也为所要求，它们本身也产生所求的可数基。

12. 总 结

（1）对于$i>j$，$T_i\Rightarrow T_j$。

（2） $\psi M\Rightarrow PN\Rightarrow CN\Rightarrow N$

$N+R_0\Rightarrow CR\Rightarrow R\Rightarrow R_2\Rightarrow R_1$。

（3a） CR，R，R_1和R_0是产生的。

（3b） $T_{3\frac{1}{2}}$，T_3，T_2，T_1和T_0是产生的。

（3c） ΨM是可数产生的。

（3d） PN，CN，N不是产生的。

参考文献：

〔1〕C. L. Chang, Fuzzg topaeogical Spaces, J. Math, Anal, Appl. 24 (1968) 182—190.

〔2〕A.S.Davis, Indexed systems of necghbourhocds for general topological spaces, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 886—893.

〔3〕J.A.Goguen, Thefuzzy Tychonoff Theorem, J.Math.Anal.Appl.43 (1973) 734—742.

〔4〕B.Hutton. Novmality in fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. 50 (1975) 74—79.

〔5〕B.Hutton, Uniformities on fuzzy topological spaces, J. Math Anal Appl. (1976).

〔6〕B.Hutton, Products of fazzy topological Spaces. To appear.

〔7〕B.Hutton and I. Reilly, Separation axioms in fuzzy topological spaceu(uursionl) Univ.Auckland Report Sor. 55.

〔8〕R.Lowen, A theory of fuzzy topaloyies, Ph.D.thesis, Free Univ. Brussels, Belgium.

〔9〕R.Lowen, Fuzzy topological spaces and fuzzy Compactness, Free Univ, Brussels Report Ser.

〔10〕R.Lowen, Jopologies floues, C.R.Acad.Sc.Paris, 278 A (1974) 925—928.

〔11〕 C.K.Wong,Covering properties of fuzzy topologicol spaces,J.Math. Anal. Appl. 43 (1973) 697—704.
〔12〕 C.K.Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy topology,J. Math. Anal. Appl 46 (1974) 316—328.
〔13〕 C.K.Wong, Fuzzy topology: product and guotient, theorems, J. Math. Anal. Appl. 45 (1973) 512—521.
〔14〕 L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and control 8 (1965) 338—353.
〔15〕 B.Hutton,Uniformities on fuzzy topalogical spaces II. To appear.
〔16〕 B.Hutton,Compactifications of fuzzy topolgical Spaces, To appear,

（译自 Fuzzy sets and systems. 3 (1980) 93—104）
（董根银、张露娜译，赵根榕校）

不分明集论中的函数、等价关系、商空间和子集

M.A.Erceg

普通集论中，集X的幂集与2^X为同构格。不分明集论则把$Z=\{0,1\}$的格推广为更加广义的，即通常所谓非布尔的格。该格中之"点"不必具有布尔特性。因此，适当的推广必须建立在那些不用明确地使用点即可定义的概念的基础之上。我们正是从上述原理出发，利用幂集的成员而不专门涉及集合的单个成员来给出函数、关系和商集的等价定义。

有些作者已经对函数和商集的推广进行了一些研究（见参考文献［1,2,5］）。这些都是我们所引进概念的特殊情况。

1．前 言

普通集论中，集X的定义，实际指X的幂集$\wp(X)$，以及利用交、并、补（$\cap$，$\cup$，$'$）等运算方法将其诸元进行组合。因此，所谓集X，指的是四重$\langle\wp(X), \cap, \cup, '\rangle$。显然，它与按照通常方式定义运算的四重格$\langle 2^X, \wedge, \vee, '\rangle$同构。

（例如，当$x\in X$时，$(x_1\vee x_2)(x)=x_1(x)\vee x_2(x)$）。

不分明集论中的格，是比$Z=\{0,1\}$（具有普通格的运算方法）更加广义的格。Zadeh［1］、Chang［2］及Wong［6］等作者已经考虑了单位区间$I=[0,1]$。Hutton［3,4］和Goguen［10］则利用了下列条件。

定义1.1 不分明集是一个具有逆序对合的完全分配格。（见参考文献［8］格论术语）

根据这一定义，四重$\langle L, \wedge, \vee, '\rangle$将用来表示不分明集，用$'$表示逆序对合。

假设X是一个集，利用$\langle L, \wedge, \vee, '\rangle$的积运算方法可以得出$L^X$。例如设$\lambda, \mu\in L^X$，当$x\in X$时，则$\lambda\wedge\mu$可从下式得出：

$$(\lambda\wedge\mu)(x)=\lambda(x)\wedge\mu(x).$$

显然，$\langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle$也是一个不分明集，它将起到普通集论中集$X$的作用。当$L=2$时，不分明集论，在格的同构情况下，与普通集论相同构。这种同构是指把一个集与其特征函数结合起来而言的。

X的子集相当于映射$\lambda\in L^X$。$\lambda(x)$可理解为x在λ中的隶属度。我们将用λ表示"X的不分明子集"，用$\langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle$表示不分明集。

注释1.2 具有最大元素与最小元素（分别用1和0表示）的不分明集是完备格。如果被定义为，$O(x)=0$，对$x\in X$的$0\in L^X$（类似地定义1），那么0和1是$\langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle$的最小元素与最大元素。

Chang 的定义如下（见[2]）：

定义1.3 X的不分明拓扑，或不分明集X的拓扑是一个对子$\langle L^X, \mathscr{T}\rangle$（严格说是$\langle L^X, \wedge, \vee, \mathscr{T}\rangle$）这里$\mathscr{T} \subset L^X$且

（1） $0, 1 \in \mathscr{T}$，

（2） $\mathscr{T}$的任意的上确界是封闭的，

（3） $\mathscr{T}$的有限下确界是封闭的。

开集和闭集，内核和闭包运算，可用普通方法定义。例如，设$\lambda \in L^X$，则内核λ是：

$$\lambda^0 = \vee\{\mu \in \mathscr{T} / \mu \leqslant \lambda\}.$$

不分明集的最初描述，见参考文献[1]，而不分明拓扑空间，见参考文献[2]。

2．关　系

设R是集X与集Y之间的关系，根据

$$R(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \; s.t. \; xRy\}$$

定义映射$R: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$

则 （1） $R(\phi) = \phi$

（2） $R(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} R(A_\alpha)$

对任意$A_\alpha \in X$，任意指标集Δ皆成立。$R(\{x\})$是与$x \in X$相关的Y的所有元素的集。

反之，若$R: \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$是满足（1）和（2）的映射，则在定义$xRy \Longleftrightarrow y \in R(\{X\})$时，可得出$X$和$Y$之间的关系。这样做时，我们并没有利用条件（2），但从该关系得出上述映射时，若首先要求条件（2），便可确定两个映射是相同的。

我们建立了满足（1）和（2）式的映射集同关系之间的一个双射。

定义2.1 不分明集X和Y的不分明关系是一个映射　$R: \langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle \to \langle L^Y, \wedge, \vee, '\rangle$满足

（1） $R(0) = 0$，

（2） $R(\bigvee_\alpha \lambda_\alpha) = \bigvee_\alpha R(\lambda_\alpha)$对所有$\lambda_\alpha \in L^X$皆成立。

其不分明集的逆关系R^{-1}，定义为映射

$$R^{-1}: \langle L^Y, \wedge, \vee, '\rangle \to \langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle$$

其中$R^{-1}(\mu) = \wedge\{\lambda \in L^X : R(\lambda') \leqslant \mu'\}$

因为 $R(1') = R(0)$

$= 0$

$\leqslant \mu'$　对所有$\mu \in L^Y$皆成立。

右端是一个完备格中非空集的下确界。除非另有说明，若R为不分明集之间的关系，则R^{-1}为不分明集关系之逆。

注释2.2 对关系的如此描述，是建立在Hutton[3]关于一致元的描述（它在普通集论中当然是一个关系）的基础之上的。

命题2.3 若R，T是象2.1中那种不分明关系，则

（1） $R(\lambda) \leqslant \mu$　当且仅当　$R^{-1}(\mu') \leqslant \lambda'$，

（2） $R^{-1}(\bigvee_{\alpha}\lambda_{\alpha})=\bigvee_{\alpha}R^{-1}(\lambda_{\alpha})$,

（3） $(R^{-1})^{-1}=R$,

（4） $R\leqslant T$ 当且仅当 $R^{-1}\leqslant T^{-1}$,

（5） $(R\circ T)^{-1}=T^{-1}\circ R^{-1}$.

证明见参考文献 Hutton［3］。

推论2.4 若R是2.1中的不分明关系，则R^{-1}也是。

证明： $R^{-1}(0)=\wedge\{\lambda\in L^X: R(\lambda')\leqslant 1\}$

$$=0$$

$$R^{-1}(\bigvee_{\alpha}\lambda_{\alpha})=\bigvee_{\alpha}R^{-1}(\lambda_{\alpha}) \quad (\text{根据 } 2.3)$$

定义2.5 若$R: L^X\to L^Y$是2.1中那种不分明关系，则由 $R^{-1}(\mu)=\vee\{\lambda: R(\lambda)\leqslant\mu\}$ 来定义映射$R^{-1}: L^Y\to L^X$。

例2.6 R^{-1}不必是一个不分明关系，令$L=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$是一个普通顺序的格，且具有由$x'=1-x\ (x\in L)$所定义的对合。

设$R(1)=1$，$R(\frac{3}{4})=R(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$R(\frac{1}{4})=R(0)=0$，则$R$是一个不分明关系。但$R^{-1}(0)=\frac{1}{4}\neq 0$。

命题2.7

（1） $R^{-1}(\mu)=[R^{-1}(\mu')]'$

（2） $R(\lambda)\leqslant\mu\Leftrightarrow\lambda\leqslant R^{-1}(\mu)$

（3） $R^{-1}(\bigwedge_{\alpha}\mu_{\alpha})=\bigwedge_{\alpha}R^{-1}(\mu_{\alpha})$

证明：

（1） $[R^{-1}(\mu')]'=[\wedge\{\lambda: R(\lambda')\leqslant\mu\}]'$
$=\vee\{\lambda': R(\lambda')\leqslant\mu\}$
$=R^{-1}(\mu)$.

（2） ($\Longrightarrow$)显然。

($\Longleftarrow$) $\lambda\leqslant R^{-1}(\mu)=\vee\{x: R(x)\leqslant\mu\}$
$\Longrightarrow R(\lambda)\leqslant\vee\{R(x): R(x)\leqslant\mu\}\leqslant\mu$.

（3） $\bigwedge_{\alpha}R^{-1}(\mu_{\alpha})\geqslant x\Leftrightarrow R^{-1}(\mu_{\alpha})\geqslant x \quad \forall\alpha$

$\Leftrightarrow R(x)\leqslant\mu_{\alpha} \quad \forall\alpha$(根据（2）)

$\Leftrightarrow R(x)\leqslant\bigwedge_{\alpha}\mu_{\alpha}$

$\Leftrightarrow R^{-1}(\bigwedge_{\alpha}\mu_{\alpha})\geqslant x$ （根据（2））

定义2.8 在2.1中的不分明关系R称为保对合，当且仅当$\forall\lambda\in L^X$，$R(\lambda')=[R(\lambda)]'$。

因此根据命题2.7，R^{-1}是保对合，当且仅当$R^{-1}=R^{-1}$。

下一节我们将指出这一不分明关系的条件相当于$L=2$时的函数关系。我们看到，按照命题2.7（3），若关系R是保对合的类似于函数的特性，其逆满足$R^{-1}(\bigwedge_{\alpha}\mu_{\alpha})=\bigwedge_{\alpha}R^{-1}(\mu_{\alpha})$。

3．函　数

设$f: X\to Y$是一个映射，根据$F(A)=\{f(a): a\in A\}$定义映射$F: \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$，则

（1） $F(\phi)=\phi$

（2） $F(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha F(A_\alpha)$

于是，F是一个不分明关系（若认为不分明集与其特征函数等同的话）从而F^{-1}可按定义2.1来定义

$$[F^{-1}(B')]'=\bigcup\{A: F(A)\subseteq B\}$$
$$=\{x: f(x)\in B\}$$

于是$F^{-1}(B)=\{x: f(x)\in B'\}'=\{x: f(x)\in B\}$，因此，

（3） $F^{-1}(B)=[F^{-1}(B')]'$，即F是一个保对合的不分明关系，且由（2）知，也是与单子上的f相符合的唯一关系。

反之，我们有以下命题：

命题3.1　若$F: \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$满足上述（1），（2），（3）式，则当$x\in X$，定义$f(x)=F(\{x\})$时，即可得函数$f: X\to Y$。

证明：只需证明$f(x)$是Y中的单子。即

$$(A)\quad F(\{x\})\neq\phi,$$
$$(B)\quad y,\ z\in F(\{x\})\Longrightarrow y=z.$$

令　$D=\{x\in X: F(\{x\})=\phi\}$

$\phi=F^{-1}(\phi)$

$=\bigcup\{A: F(A)\subseteq\phi\}$　　（因为根据（3）$F^{-1}=F^{-1}$）

$=\{z: F(\{z\})=\phi\}$

$=D.$

假设$y,\ z\in F(\{x\})$，同时$y\neq z$，

$$F^{-1}(\{y\})=\{p\in X: F(p)\subset\{y\}\}$$
$$=\{p: F(p)=\{y\}\}\qquad \text{根据}(A)$$

则$x\,\overline{\in}\,F^{-1}(\{y\})$。$F^{-1}(\{y\}')=\{P: F(P)\subset\{y\}'\}=\{P: y\,\overline{\in}\,F(P)\}$，则$x\in F^{-1}(\{y\}')$。但$[F^{-1}(\{y\})]'=F^{-1}(\{y\}')$，互相矛盾，所以$y=z$。

于是我们就在映射$f: X\to Y$及$F: \mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(Y)$之间建立了一个满足（1），（2），（3）的双射关系。

定义3.2　从不分明集X到不分明集Y的不分明函数是一个映射：

$$F: \langle L^X,\wedge,\vee,'\rangle\to\langle L^Y,\wedge,\vee,'\rangle$$

满足下列条件

（1） $F(0)=0$，

（2） $F(\bigwedge_\alpha\lambda_\alpha)=\bigvee_\alpha F(\lambda_\alpha)$，

（3） $F^{-1}(\lambda')=[F^{-1}(\lambda)]'$

即F是一个保对合的不分明关系的逆。

注释3.3 根据条件(3)可得出

$$F^{-1}(\mu)=\bigvee\{\lambda:F(\lambda)\leqslant\mu\}.$$

例3.4 Zadeh 在[1]中介绍了两个不分明集之间的下列映射，即：

若$f:X\to Y$是一个函数，则函数$f:L^X\to L^Y$可按下式定义：

$$f(\lambda)(y)=\begin{cases}\bigvee\{\lambda(x):x\in f^{-1}(y)\} & 若f^{-1}(y)\neq\phi\\ 0 & 若f^{-1}(y)=\phi\end{cases}$$

此外，Zadeh 在[1]中还引进了上述映射之逆映射，即$f^{-1}:L^Y\to L^X$，这里$f^{-1}(\mu)=\mu\circ f$。

这些映射在Chang[2]、Wong[6.5]和其他目前有关不分明拓扑论资料中都引用过。

不难证明，上述定义的f，是一个不分明函数，且其逆不分明函数与 Zadeh 在[1]中的逆映射相同。于是，[1, 2]和[5]中的某些工作，是下述理论的特殊情形。

注释3.5 不分明函数是 Zadeh 型函数的非平凡的推广，由下例可见。

例3.6 $L=[0,1]=I$，令$X=Y=$单子，$I^X\approx I^Y\approx I$，使$f:I\to I$

$$\begin{aligned} f(x)&=2x & x&\in\left[0,\ \frac{1}{6}\right]\\ &=\frac{1+2x}{4} & x&\in\left[\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right]\\ &=2x-1 & x&\in\left[\frac{5}{6},\ 1\right]\end{aligned}$$

但是，对于上述X,Y,L，任何 Zadth 型函数或是处处等于零，或是**“恒等函数”**。

下面我们来看看不分明函数的连续性。

定义3.7 设$\langle L^X,\mathscr{T}\rangle$和$\langle L^Y,\mathscr{U}\rangle$是不分明的拓扑空间，并设$f:L^X\to L^Y$是一个不分明函数，则$f$是连续函数，当且仅当$f^{-1}(U)\in\mathscr{T}$对所有$U\in\mathscr{U}$皆成立。

命题3.8 设$f:L^X\to L^Y$是一个不分明函数，则

(1) $\forall\lambda\in L^X$ $\quad\lambda\leqslant f^{-1}\circ f(\lambda)$

(2) $\forall\mu\in L^Y$ $\quad f\circ f^{-1}(\mu)\leqslant\mu$

证明： 直接引用$f^{-1}(\mu)=\bigvee\{\lambda:f(\lambda)\leqslant\mu\}$.

定义3.9 若$f:\langle L^X,\mathscr{T}\rangle\to\langle L^Y,\mathscr{U}\rangle$是不分明拓扑空间之间的一个不分明函数，则下述命题是等价的：

(A) f是连续的。

(B) 对于$\langle L^Y,\mathscr{U}\rangle$中的任意闭集$\mu$，$f^{-1}(\mu)$是$\langle L^X,\mathscr{T}\rangle$上的闭集。

(C) $\forall\lambda\in L^X$，$x\in N(f(\lambda))\Longrightarrow f^{-1}(x)\in N(\lambda)$.

(其中$N(\lambda)$表示λ的邻域系)

(D) $\forall\lambda\in L^X$，$x\in N(f(\lambda))\Longrightarrow\exists K\in N(\lambda)$ 从而$f(k)\leqslant x$.

证明： $A\Longleftrightarrow B$：因为$f^{-1}(\mu)=[f^{-1}(\mu')]'$.

$A\Longrightarrow C$：令$\lambda\in L^X$且$x\in N(f(\lambda))$，则存在一个$K\in\mathscr{U}$满足$f(\lambda)\leqslant K\leqslant x$.

因而 $f^{-1}\circ f(\lambda)\leqslant f^{-1}(K)\leqslant f^{-1}(x)$.

根据(A)$f^{-1}(K)\in\mathscr{T}$和命题3.8(A)，$\lambda\leqslant f^{-1}\circ f(\lambda)$。从而得出$f^{-1}(x)\in N(\lambda)$.

$C\Longrightarrow D$：设$\lambda\in L^X$，$x\in N(f(\lambda))$以及$K=f^{-1}(x)$，则$K=f^{-1}(x)\in N(\lambda)$，根据($C$)和命题3.8($B$)，$f(K)=f\circ f^{-1}(x)\leqslant x$.

$D\Longrightarrow A$：设$\mu\in\mathscr{U}$，则$f^{-1}(\mu)=\vee\{\gamma/f(\gamma)\leqslant\mu\}$，

同时，$[f^{-1}(\mu)]^{\circ}=\vee\{\beta/f(\beta)\leqslant f^{-1}(\mu),\ \beta\in\mathscr{T}\}$

$=\vee\{\beta/f(\beta)\leqslant\mu,\ \beta\in\mathscr{T}\}$。

这里，我们从命题3.7引用，$f(\beta)\leqslant\mu\Longleftrightarrow\beta\leqslant f^{-1}(\mu)$，若$\gamma$满足$f(\gamma)\leqslant\mu$，则$\mu\in N(f(\gamma))$。根据（$D$），存在$K\in N(\gamma)$，从而$f(k)\leqslant\mu$，我们可取$k\in\mathscr{T}$，并不失一般性。$\gamma\leqslant k\in\mathscr{T}$ $\Longrightarrow\gamma\leqslant[f^{-1}(\mu)]^{\circ}$，

因此，$f^{-1}(\mu)=[f^{-1}(\mu)]^{\circ}\in\mathscr{T}$。

4. 等价关系

如第二节所述，我们把普通集论中之关系看成是一种映射。

定义4.1 在一个不分明集$\langle L^X,\wedge,\vee,'\rangle$上的等价关系，或者说，一个不分明的等价关系是一个映射，即$R:L^X\to L^X$满足下列条件：

（1） $R(0)=0$

（2） $R(\bigvee_\alpha\lambda_\alpha)=\bigvee_\alpha R(\lambda_\alpha)$ $\forall\lambda_\alpha\in L^X$，

（3） $\lambda\leqslant R(\lambda)$ $\forall\lambda\in L^X$（自反性）。

（4） $R=R^{-1}$ （对称性）。

（5） $R^2\leqslant R$ （传递性）

注释：按照（3），（5）可以强化为

（5）′ $R^2=R$。

若T是一个普通意义上的X的等价关系，则由$R(A)=\{b/\exists a\in A:aTb\}$定义$R:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$时，便可得出$\mathscr{P}(X)$即$2^X$的一个不分明等价关系（当我们将一个集与其特征函数同等看待时）。

我们可以得到$xTy\Longleftrightarrow y\in R(\{x\})$。

T是对称的，所以

$$
\begin{aligned}
xTy&\Longleftrightarrow xTy\text{ 和 }yTx\\
&\Longleftrightarrow y\in R(\{x\})\text{ 和 }x\in R(\{y\})\\
&\Longleftrightarrow R(\{x\})=R(\{y\}),
\end{aligned}
$$

在证明（⇒）时使用了R的传递性，而（⇐）的证明则使用了R的自反性。

现在，$R(A)=\bigcup_{a\in A}R(\{a\})$ 若$A\subset X$。

我们定义$ATB\Longleftrightarrow R(A)=R(B)$。则$A$是$T$-相关于$B$的，当且仅当包含$A$之各点的所有$T$-等价类就是包含$B$之各点的所有$T$-等价类。

现在我们来研究L^X的广义的不分明的等价关系的情况。我们说$\lambda,\mu\in L^X$是等价的，当且仅当$R(\lambda)=R(\mu)$，而且记为$\lambda\sim\mu$。

我们定义λ的等价类即$\vee\{\mu\in L^X/\lambda\sim\mu\}$并用$[\lambda]_R$表示之，则$[\lambda]_R=\vee\{\mu/R(\lambda)=R(\mu)\}$。

命题4.3 $[\lambda]_R=R(\lambda)$。

证明：$R^2(\lambda)=R(\lambda)\Longrightarrow R(\lambda)\leqslant[\lambda]_R$，

设 $\mu\in L^X$ 满足 $R(\lambda)=R(\mu)$，则 $\mu\leqslant R(\mu)$ 得 $\mu\leqslant R(\lambda)$，因此 $[\lambda]_R\leqslant R(\lambda)$。

5．商集

我们已经指出，一个集在普通集论中的作用和一个不分明集在不分明集论中之作用相同。我们将把它推广到一个不分明集的商集上。

令 $L^X/R=\{[\lambda]_R\mid\lambda\in L^X\}$，其中 R 就是上节所述的不分明集 L^X 上的等价关系。我们用 $[\lambda]_R\leqslant[\mu]_R\Leftrightarrow R(\lambda)\leqslant R(\mu)$（后者用$\leqslant$是在 L^X 格中使用），定义 L^X/R 的偏序，$\leqslant$。不难指出关系$\leqslant$是自反的、反对称的和传递的。

命题5.1 $\langle L^X/R,\leqslant\rangle$是一个完备格。

证明： 只需证明对某个指标集 Δ，$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}\subset L^X$，$\{[\lambda_\alpha]_R\}_{\alpha\in\Delta}$ 在$\langle L^X/R,\leqslant\rangle$中既有一最小上界，又有一个最大下界。

实际上 $\bigvee_\alpha[\lambda_\alpha]_R=[\bigvee_\alpha\lambda_\alpha]_R$，因假设 $x\in L^X$，则

$$
\begin{aligned}
[x]_R\geqslant\bigvee_\alpha[\lambda_\alpha]_R&\Leftrightarrow[x]_R\geqslant[\lambda_\alpha]_R\quad\forall\alpha\in\Delta\\
&\Leftrightarrow R(x)\geqslant R(\lambda_\alpha)\quad\forall\alpha\in\Delta\\
&\Leftrightarrow R(x)\geqslant\bigvee_\alpha R(\lambda_\alpha)\\
&\qquad\qquad=R\Big(\bigvee_\alpha\lambda_\alpha\Big)\\
&\Leftrightarrow[x]_R\geqslant\Big[\bigvee_\alpha\lambda_\alpha\Big]_R
\end{aligned}
$$

此外，$\bigwedge_\alpha[\lambda_\alpha]_R=\Big[\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\Big]_R$

因若 $x\in L^X$，则

$$
\begin{aligned}
[x]_R\leqslant\bigwedge_\alpha[\lambda_\alpha]_R&\Leftrightarrow[x]_R\leqslant[\lambda_\alpha]_R\quad\forall\alpha\in\Delta\\
&\Leftrightarrow R(x)\leqslant R(\lambda_\alpha)\quad\forall\alpha\in\Delta\\
&\Leftrightarrow R(x)\leqslant\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\\
&\Rightarrow R(x)=R^2(x)\leqslant R\Big(\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\Big)\\
&\Rightarrow[x]_R\leqslant\Big[\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\Big]_R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{反之，}R\Big(\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\Big)&\leqslant R(R(\lambda_\alpha)\quad\forall\alpha\in\Delta\\
&=R(\lambda_\alpha)\quad\forall\alpha\in\Delta\\
\Rightarrow\Big[\bigwedge_\alpha R(\lambda_\alpha)\Big]_R&\leqslant[\lambda_\alpha]_R\quad\forall\alpha\in\Delta
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \left[\bigwedge_{\alpha} R(\lambda_{\alpha}) \right]_{R} \leqslant \bigwedge_{\alpha} [\lambda_{\alpha}]_{R} .$$

注释5.2 严格地说，$\bigvee_{\alpha}[\lambda_{\alpha}]_R = [\bigvee_{\alpha} R(\lambda_{\alpha})]_R$，类似下确界的表达式，它有下述结果。

定义5.3 用 $[\lambda]_R^* = [\{R(\lambda)\}']_R$ 定义 L^X/R 的一元运算，*.

为了方便，使用符号 $R'(\lambda) = \{R(\lambda)\}'$。

引理5.4 $R \circ R'(\lambda) = R'(\lambda) \quad \forall \lambda \in L^X$

证明： $R = R^{-1}$，从而得出：

$$\begin{aligned} R \circ R'(\lambda) &= R^{-1}(R'(\lambda)) \\ &= \bigwedge\{\mu : R(\mu') \leqslant \{R'(\lambda)\}'\} \\ &= \bigwedge\{\mu : R(\mu') \leqslant R(\lambda)\}. \end{aligned}$$

令 $\mu = R'(\lambda)$，得

$$R(\mu') = R(R(\lambda)) \leqslant R(\lambda).$$

反之，$R(x') \leqslant R(\lambda)$

$x' \leqslant R(x')$ 得 $x \geqslant R'(\lambda)$。

因此，$R \circ R'(\lambda) = R'(\lambda)$。

命题5.5 一元运算 * 是 $\langle L^X/R, \leqslant \rangle$ 的逆序对合。

证明： * 是良定义的而且是单射：

因为 $[\lambda]_R^* = [\mu]_R^* \Longleftrightarrow [R'(\lambda)]_R = [R'(\mu)]_R$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow R \circ R'(\lambda) = R \circ R'(\mu) \\ &\Longleftrightarrow R'(\lambda) = R'(\mu) \\ &\Longleftrightarrow R(\lambda) = R(\mu) \\ &\Longleftrightarrow [\lambda]_R = [\mu]_R \end{aligned}$$

* 是满射的：

若 $[\lambda]_R \in L^X/R$，则 $[R'(\lambda)]_R^* = [\lambda]_R$。

* 是自对偶的：

$$\begin{aligned} [\lambda]_R^{**} &= [R'(\lambda)]_R^* \\ &= [R' \circ R'(\lambda)]_R \\ &= [\lambda]_R. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} R \circ R' \circ R'(\lambda) &= R' \circ R'(\lambda) \\ &= \{R^{-1}(R'(\lambda))\}' \qquad \because \ R = R^{-1} \\ &= \bigvee\{\mu : R(\mu) \leqslant \{R'(\lambda)\}'\} \\ &= \bigvee\{\mu : R(\mu) \leqslant R(\lambda)\} \\ &= R(\lambda). \end{aligned}$$

因$R^2(\lambda)\leqslant R(\lambda)$，同时，若$\mu$满足$R(\mu)\leqslant R(\lambda)$，则$\mu\leqslant R(\mu)$，从而得$\mu\leqslant R(\lambda)$。

* 是反序的

$$[\lambda]_R\leqslant[\mu]_R \Longleftrightarrow R(\lambda)\leqslant R(\mu)$$

$$\Longleftrightarrow \{R(\lambda)\}'\geqslant\{R(\mu)\}'$$

$$\Longrightarrow [\lambda]_R^*\geqslant[\mu]_R^*.$$

所以 * 是在$\langle L^X/R,\ \leqslant\rangle$上的逆序对合。

定义5.6　$\langle L^X/R,\ \wedge,\ \vee,\ ^*\rangle$是一个不分明集。

证明：只需证明广义分配律是有效的. 即

$$\bigwedge_C\left\{\bigvee_{A_\gamma}[\lambda_{\gamma,\alpha}]_R\right\}=\bigvee_{D}\left\{\bigwedge_C[\lambda_{\gamma,\phi(\gamma)}]_R\right\}$$

及其对偶是指标集，其中$C\neq\phi$，$A_\gamma\neq\phi$ $\forall\gamma\in C$，而$\phi(\gamma)\in A_\gamma$ $\forall\gamma\in C$。

此种证明是将命题5.1中证明的结果进行代换并指出$\langle L^X,\ \wedge,\ \vee,\ '\rangle$是完全分配格。我们将称之为不分明商集。若无混淆的可能，也可称之为L^X的商集。

注释5.7　Wong在[5]中得出了一个（普通）商集的简单的不分明形式，这原来是不分明商集。

假设R是普通意义上的X的等价关系，而X/R是普通的商集，Wong认为从L的普通积运算可得到不分明集$L^{(X/R)}$，我们将指出这是L^X/T的同构格，其中T是一个不分明等价关系。

用　$T(\lambda)(x)=\bigvee\{\lambda(y)/xRy\}$来定义$T: L^X\to L^X$。

因为xRy适于所有$x\in X$，这是一个良定义的映射。它也是一个不分明关系。

$$T^{-1}(\gamma)=\bigwedge\{\mu/T(\mu')\leqslant\lambda'\}$$

$$=\bigwedge\{\mu/\forall x\in X,\ \bigvee\{\mu'(y)/xRy\}\leqslant\lambda'(x)\}$$

$$=\bigwedge\{\mu/\forall x\in X,\ \forall y\in R(x),\ \lambda(x)\leqslant\mu(y)\}.$$

此时$\forall x\in X$，$\forall y\in R(x)$，

$$T(\lambda)(y)=\bigvee\{\lambda(z): yRz\}$$

$$=\bigvee\{\lambda(z): xRz\}\qquad \text{因为 } xRy$$

$$\geqslant\lambda(x).$$

于是$T^{-1}\leqslant T$，根据命题2.3，

$T\leqslant T^{-1}$，　　即$T^{-1}=T$。

显然，$\lambda\leqslant T(\lambda)$

$$[T^2(\lambda)](x)=T[T(\lambda)](x)$$

$$=\bigvee\{T(\lambda)(y)/xRy\}$$

$$=\bigvee\left\{\bigvee\{\lambda(z)/yRz\}/xRy\right\}$$

$$=\bigvee\{\lambda(z)/\exists y\quad \text{从而 } xRy \text{ 及 } yRz\}$$

$$=\bigvee\{\lambda(z)/xRz\}\qquad \text{因 } R \text{ 具有传递性}$$

$$=T(\lambda)(x).$$

所以 T 是一个不分明的等价关系。

$\forall\lambda\in L^{(X/R)}$ 根据 $\lambda(x)=\lambda([x]_R)$ （其中 $[x]_R=\{y\in X/xRy\}$）定义 $\lambda\in L^X$.

根据 $\lambda\to[\lambda]_T$ 定义 $h: \langle L^{(X/R)}, \wedge, \vee, '\rangle\to\langle L^X/T, \wedge, \vee, *\rangle$.

还需证明 h 是一个格的同构。首先我们证明 $T(\lambda)=\lambda$：

$$\begin{aligned}T(\lambda)(x)&=\vee\{\lambda(y): xRy\}\\&=\vee\{\lambda([y]_R): xRy\}\\&=\lambda([x]_R)\\&=\lambda(x).\end{aligned}$$

h 是单射：

$$\begin{aligned}h(\lambda)=h(\mu)&\Longrightarrow[\lambda]_T=[\mu]_T\\&\Longrightarrow T(\lambda)=T(\mu)\\&\Longrightarrow\lambda=\mu\end{aligned}$$

h 是满射：假设 $[X]_T\in L^X/T$.

根据 $\mu([X]_R)=T(X)(x)$ 来定义 $\mu\in L^{(X/R)}$.

指出，若 $[X]_T=[\lambda]_T$，则 $T[X]=T(\lambda)$，从而 μ 对于任意 $[X]_T=[\lambda]_T$ 也是良定义。

今

$$\begin{aligned}T(\mu)(x)&=\mu(x)\\&=\mu([x]_R)\\&=T(X)(x)\qquad\text{对于 } x\in X,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow[\mu]_T=[X]_T$$

$$\Longrightarrow h(\mu)=[X]_T.$$

$h\left(\bigvee_a\lambda_a\right)=\bigvee_a h(\lambda_a)$：

$$\begin{aligned}h\left(\bigvee_a\lambda_a\right)&=\left[\bigvee_a\lambda_a\right]_T\\&=\bigvee_a\left[\lambda_a\right]_T\\&=\bigvee_a h(\lambda_a).\end{aligned}$$

$h\left(\bigwedge_a\lambda_a\right)=\bigwedge_a h(\lambda_a)$：

$$\begin{aligned}h\left(\bigwedge_a\lambda_a\right)&=\left[\bigwedge_a\lambda_a\right]_T\\&=\left[\bigwedge_a T(\lambda_a)\right]_T\qquad\because T(\lambda)=\lambda\\&=\bigwedge_a[\lambda_a]_T\end{aligned}$$

$$= \bigwedge_{a} h(\lambda_a)。$$

$\dot{h}(\lambda') = \{\dot{h}(\lambda)\}^*$：

$$h(\lambda') = [\boldsymbol{\lambda}']_T$$

$$= [T(\boldsymbol{\lambda}')]_T \qquad \text{因为 } T(\boldsymbol{\lambda}') = \boldsymbol{\lambda}'.$$

此时，$T(\lambda')(x) = \lambda'([x]_R)$

$$= \{\lambda([x])_R\}'$$

$$= \{\lambda(x)\}'$$

$$= \{T(\lambda)(x)\}'$$

$$= \{T(\lambda)\}'(x).$$

从而 $T(\lambda') = \{T(\lambda)\}'$，故

$$h\{\lambda'\} = [\{T(\lambda)\}']_T$$

$$= [\lambda]_T^*.$$

6．商 拓 扑

在第2节中我们研究了不分明关系 $R: L^X \to L^Y$。很容易看出，这个定义能够拓广为映射$R: L \to N$，式中 $\langle L, \wedge, \vee, ^\alpha\rangle$ 和 $\langle N, \wedge, \vee, ^\beta\rangle$ 是任意的不分明集，

根据 $\lambda \mapsto [\lambda]_R$ 定义$P: \langle L^X, \wedge, \vee, '\rangle \to \langle L^X/R, \wedge, \vee, ^*\rangle$.

那么，

（1）　$P(0) = [0]_R \leqslant [\lambda]_R \qquad \forall \lambda \in L^X$，

（2）　$P\left(\bigvee_a \lambda_a\right) = \bigvee_a P(\lambda_a)$，

（3）　$P^{-1}([\lambda]_R) = \{P^{-1}([\lambda]_R^*)\}'$.

（1）和（2）是显然的。下面推导（3），因为

$$P^{-1}([\lambda]_R) = \bigwedge\{\mu \in L^X | P(\mu') \leqslant [\lambda]_R^*\}$$

$$= \bigwedge\{\mu/[\mu']_R \leqslant [R'(\lambda)]_R\}$$

$$= \bigwedge\{\mu/R(\mu') \leqslant R \circ R'(\lambda) = R'(\lambda)\}$$

$$= \bigwedge\{\mu/R(\mu') \leqslant \{R(\lambda)\}'\}$$

$$= \dot{R}(\lambda).$$

因此，

$$\{P^{-1}([\lambda]_R^*)\}' = \{P^{-1}([R'(\lambda)]_R)\}'$$

$= \{R \circ R'(\lambda)\}'$

$= \{R'(\lambda)\}'$

$= R(\lambda)$

$= P^{-1}([\lambda]_R)$.

我们把 P 叫作与 R 相关的射影。由上可见，它是不分明集函数。

定义6.1 设R是不分明拓扑空间 $\langle L^X, \mathscr{T} \rangle$ 一个等价关系，那么L^X/R的商拓扑是使相联的射影为连续映射的最大的不分明拓扑。

因此，如果$\mathscr{T}_R$是商拓扑，

$\mathscr{T}_R = \{[\lambda]_R : P^{-1}([\lambda]_R) \in \mathscr{T}\}$

$= \{[\lambda]_R : R(\lambda) \in \mathscr{T}\}$.

$\mathscr{T}_R$确实是一个不分明拓扑，因为P^{-1}保持下确界和上确界。

定义6.2 不分明函数 $f : \langle L, \mathscr{T} \rangle \to \langle N, \mathscr{U} \rangle$是开的，当且仅当$\forall \lambda \in \mathscr{T}$，$f(\lambda) \in \mathscr{U}$.

现在我们根据 Kelley [9]给出一个定理。它和原来的定理比较更精致。

定理6.3 若$\langle L^X, \mathscr{T} \rangle$是一个不分明拓扑空间，$R$是$L^X$上的不分明关系，且相联的射影为： $P : \langle L^X, \mathscr{T} \rangle \to \langle L^X/R, \mathscr{T}_R \rangle$

那么下面的命题是等价的。

(A) P是一个开映射。

(B) R是一个开映射，

(C) R^{-1}是一个闭映射。

证明： $A \Longrightarrow B$. 令$\lambda \in L^X$，$P^{-1}(P(\lambda)) = P^{-1}([\lambda]) = R(\lambda)$. 设$\lambda \in \mathscr{T}$，(A)得出$R(\lambda) \in \mathscr{T}_R$，由$P$的连续性可得 $P^{-1}(P(\lambda)) \in \mathscr{T}$，即 $R(\lambda) \in \mathscr{T}$.

$B \Longrightarrow A$. 对于 $\lambda \in \mathscr{T}$，$R(\lambda) \in \mathscr{T}_R$，因 R 是一个开映射，即 $P^{-1}(P(\lambda)) \in \mathscr{T}$，由定义$\mathscr{T}_R$得，$P(\lambda) \in \mathscr{T}_R$，即 P 是一个开映射。

$B \Longleftrightarrow C$. 根据命题 2.7 和 $R = R^{-1}$，利用 $R^{-1}(\lambda) = [R^{-1}(\lambda')]'$这个结果。

附注6.4 当$L = 2$ 的情况下，这个定理的对偶也是成立的，即这个定理中的开和闭二字可以互换。

7. 子 集

我们用X表示四重$\langle \mathscr{P}(A), \cap, \cup, * \rangle$，这里$\cap$和$\cup$是$X$中的交和并运算，且当$B \in \mathscr{P}(A)$时，$B^* = A \cap B'$. 变换成特征函数，便有$\langle \mathscr{L}_A, \wedge, \vee, * \rangle$，其中$\mathscr{L}_A = \{\lambda \in 2^X / \lambda \leqslant x_A\}$，$x_A$是$A$的特征函数。

设$\langle L^X, \wedge, \vee, ' \rangle$是一个不分明集，又设 $\mu \in L^X$，则"子集μ"的记号对应于四重$\langle \mathscr{L}_A, \wedge, \vee, * \rangle$. 我们要求

(1) $\langle \mathscr{L}_\mu, \wedge, \vee, * \rangle$是不分明集，

(2) 当$L = 2$ 时变为通常情况。

显然，$\mathscr{L}_\mu=\{\lambda\in L^x|\lambda\leqslant\nu\}$ 和 $\lambda\in\mathscr{L}_\mu$ 时，$\lambda^*=\lambda'\wedge\mu$。但是若取 $\lambda\leqslant\mu'\wedge\mu$，我们即得

$$\lambda^*=\lambda'\wedge\mu\geqslant(\mu\vee\mu')\wedge\mu=\mu.$$

很容易找到 $L=1$的例子，这时 $\lambda^*>\mu$，即在这种情况下 $\mathscr{L}_\mu$ 在 * 之下是非闭的。

如果用 $\mu\wedge\mu'$ 限定 $\mathscr{L}_\mu$ 如下，就可以克服上面的缺点，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\mu&=\{\lambda\in L^x/\mu\wedge\mu'\leqslant\lambda\leqslant\mu\}\\&=\{\lambda_\mu/\lambda\in L^x\}\end{aligned}$$

式中$\lambda_\mu=(\lambda\wedge\mu)\vee(\mu\wedge\mu')$。

则

$$\begin{aligned}(\lambda_\mu)^*&=[(\lambda\wedge\mu)\vee(\mu\wedge\mu')]'\wedge\mu\\&=[(\lambda'\vee\mu')\wedge(\mu'\vee\mu)]\wedge\mu\\&=(\lambda'\vee\mu')\wedge\mu\\&=(\lambda'\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\\&=(\lambda')_\mu\in\mathscr{L}_\mu.\end{aligned}$$

定理7.1 假设 $\langle L^x,\wedge,\vee,'\rangle$ 是不分明集和 $\mu\in L^x$，且当 $\lambda\in L^x$ 时，$\lambda_\mu=(\lambda\wedge\mu)\vee(\mu\wedge\mu')$，$\mathscr{L}_\mu=\{\lambda_\mu/\lambda\in L^x\}$ 及 $\lambda_\mu^*=(\lambda')_\mu$，则 $\langle\mathscr{L}_\mu,\wedge,\vee,*\rangle$ 是不分明集。

证明：因 $\langle L^x,\wedge,\vee\rangle$ 是完备分配格，故 $\langle\mathscr{L}_\mu,\wedge,\vee,\rangle$ 也是完备分配格，因$\mathscr{L}_\mu$在$\wedge$和$\vee$的运算下是封闭的。

$\mathscr{L}_\mu$是在 * 之下封闭的，还需证明 * 是 $\mathscr{L}_\mu$ 上的逆序对合。

* 是单射的：

$$\begin{aligned}\lambda_\mu^*=x_\mu^*&\Longrightarrow(\lambda'\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)=(x'\wedge\mu)\vee(\mu'\vee\mu)\\&\Longrightarrow(\lambda\vee\mu')\wedge(\mu\vee\mu')=(x\vee\mu')\wedge(\mu\vee\mu')\\&\Longrightarrow[(\lambda\wedge\mu)\vee\mu']\wedge\mu=[(x\wedge\mu)\vee\mu']\wedge\mu\\&\Longrightarrow(\lambda\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)=(x\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\\&\Longrightarrow\lambda_\mu=x_\mu.\end{aligned}$$

* 是满射的： $(\lambda')_\mu^*=\lambda_\mu$.

* 是自对偶的：$\lambda_\mu^{**}=(\lambda')_\mu^*=(\lambda'')_\mu=\lambda_\mu$.

* 是反序的：

$$\begin{aligned}\lambda_\mu\leqslant x_\mu&\Longrightarrow(\lambda\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\leqslant(x\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\\&\Longrightarrow(\lambda'\vee\mu')\wedge(\mu\vee\mu')\geqslant(x'\vee\mu')\wedge(\mu\vee\mu')\\&\Longrightarrow[(\lambda'\vee\mu')\wedge\mu']\wedge\mu\geqslant[(x'\wedge\mu)\vee\mu']\wedge\mu\\&\Longrightarrow(\lambda'\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\geqslant(x'\wedge\mu)\vee(\mu'\wedge\mu)\\&\Longrightarrow\lambda_\mu^*\geqslant x_\mu^*.\end{aligned}$$

定义7.2 $\langle\mathscr{L}_\mu,\wedge,\vee,*\rangle$ 称作 L^x 的不分明子集μ。

注7.3 假设 $L=2$ 和 $\mu\in L^x$，那么 $\mu\wedge\mu'=\phi$，这个定义可以转化为通常的定义。

若 L^x 有拓扑$\mathscr{T}$，那么我们可以将关于不分明子集 μ 的 L^x 的子拓扑空间定义为 $\mathscr{T}_\mu=\{\lambda_\mu/\lambda\in\mathscr{T}\}$.

注7.4 因为一般来说，$\mathscr{L}_\mu$不是某个集A的L^A的形式。我们至今定义的大多数概念必须稍作推广以适应该结构。例如，一个不分明函数必须定义为$\mathscr{L}$，此处$\mathscr{L}$是一个不分明集，而不是定义为$\langle L^X, \wedge, \vee, ' \rangle$类型的不分明集。

8．结 论

虽然不分明集的不分明点在参考文献［7］中已经定义过了，但是它不具有与普通集论点相关的布尔特性。在某些情况下,这种所谓点的概念,可以不必明确地使用点来加以定义。例如，我们在第4节中已经指出，保存逆序对合的条件，对应于单子在关系下的象仍是单子的条件。

在探讨不分明集论时，我们发现在普通集论中的点并不是想象的那样重要。

附 言

当前在R.Lowen的著作［11］中，改变了不分明拓扑的定义，因此，1.3节定义(1)变成：

(1)′：从X到L的所有常值函数都存在于$\mathscr{T}$中。

根据这一约束定义，常值函数都是连续函数。但是，不分明拓扑的这一定义，仅仅适用于L^X形式的结构，并不适用于在第5和第7部分中所描述的更为普遍的不分明商集和不分明子集。

感 谢

有些作者已经研究了函数和商集的推广(参见参考文献［1，2，5］)，它们是我们所引进概念的特殊情况。

参 考 文 献

［1］L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8(1965) 338—353.

［2］C.L. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. 24(1968) 182—190.

［3］B.W. Hutton, Uniformities on fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl(1976)

［4］B.W. Hutton, Normality in fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. 50(1975) 74—79.

［5］C.K. Wong, Fuzzy topology: Product and quotient theorems. J.Math. Anal. Appl. 45(1974) 512—521.

［6］C.K. Wong, Covering properties of fuzzy topology spaces. J.Math. Anal. Appl 43(1973) 697—704.

［7］C.K. Wong, Fuzzy points and local propertiesof fuzzy topology.

J. Math. Anal. Appl. 46 (1974) 316—328.
[8] G.Birkhoff, Lattice Theory (A.M.S. Colloquium publications Vol XXV, 1967).
[9] J.L. Kelley, General Topology (Van Nostrand,princeton,NJ,1955).
[10] J.A. Goguen, L-fuzzy sets, J.Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145—174
[11] R.Lowen. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. J.Math. Anal. Appl. 56 (1976) 621—633.

(本文译自 Fuzzy sets and systems 3 (1980) 75—92)

蔡炳衡 译

不分明映射的不分明唯一性

S.Gottwald

对于高水平不分明集之间的不分明映射，我们所考虑的不分明唯一性概念，即就是这样的一些不分明函数，直观含意是使一个如此的不分明函数 f 之域中“几乎恒等”的元，它们在 f 下必有“几乎恒等”的象点。

其表征乃是这样的不分明映射，它们都表现为实（即就是真值为 1）的不分明单值或不分明双重单值，且对于那些不分明集，则成为实不分明单值不分明映射的域。

最后，作为不分明基数的一个应用，引进它们的排列次序，和与积，以及某些性质的证明。

1. 序 言

就不分明集及其在许多场合的应用的研究上说，仅论及“古典”事件的某些通用的不分明子集（参见[1,2]）。但对于某些问题似乎有一适当的论域，它在不分明子集的形成下成为闭的（参见例子[10, p.40, 41]）。在这种情况下，凡这种论域中的元素，显而易见是高水平不分明集，亦即，不分明集之部分仍是不分明集。

这种论域的构成，以及集论上高水平不分明集的性质我已在[6]与[8]中研究过。与集代数的运算一起，对不分明集我在[8]中已考察过不分明映射的概念，或不分明二元关系，这如同通常对应概念的不分明化。此外，剩下如何揭示用不分明函数对不分明唯一性的理解，这将在本文加以讨论。

已无保留地在D.Klaua 的早期论文里（如[9]），以及较迟而更明显的 R. Giles论文[3]与论文[5]里，已经意识到一个适当的构架，这对扩大不分明集论会有相当多有价值的逻辑，并称为不分明逻辑。所要作的事，要较之 L. A. Zadeh采用不分明集论与古典

集论之间形式上类似地隶属函数记号法给人有深刻的印象。此外，相近地给出非常自然又可能深的概括：例如对于 Zadeh（参见［11］）的双值不分明包含关系（它仅只有真实或不真实），到多值之一为“真”且有不同真值度的开拓。此处和别的情况下的基本点，是应用不分明集的真值隶属度，且为叙述不分明集的性质，则首先引进双值，其一为不分明逻辑的合式公式。

上面提到的古典集论与不分明集论之间的类似情形，现在常用下述方法，例如包含在两种情况下之集被描述成公式：

$$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B),$$

该式在古典集论里有通常的意义，其中逻辑符号$\in$在不分明集论中必须被解释为属于不分明逻辑。

现在，有了启发我们如何定义不分明映射唯一性的不同线索。如像古典集论中那样，一个不分明映射F乃是不分明序对的一个不分明集——两个域中元素的（不分明）坐标理解为属于（某些度数）F的不分明序对。因此，按我们的论点，可以尝试着由下面表达式定义不分明唯一性：

$$(x_1,\ y_1)\in F\wedge(x_2,y_2)\in F\wedge x_1=x_2\rightarrow y_1=y_2 \qquad (1)$$

该式可解释成一个不分明逻辑公式。它是接近［6，8］关于不分明集论的主要原理之一，那个“几乎恒等”元素也必须表现为“几乎同一”。因此，这里发生的问题是：关于(x_1,y_1)之某些x_1是否与X“几乎恒等”？公式（1）是不能作为任何回答。于是我们改变该公式，并考察更为复杂的一个式子：

$$(x_1,y_1)\in F\wedge(x_2,y_2)\in F\wedge x_1=x_2\rightarrow y_1=y_2$$

该公式之末尾，在形式上似乎明显地附予了不分明唯一性的一个定义。仅有一点困难，那就是如何解释在多值逻辑中的结合问题——因对每一个都有两种可能。因此，我们认为开始讨论的共有四个可能的结果——最后集中在一个上。

2．预备知识

在研究中，我们习惯以$=$表恒等和$\in$表隶属而为一次逻辑。不分明逻辑(s)连续的规定为：

$s\wedge_1 t=\min(s,t)$，$s\vee_1 t=\max(s,t)$，$\neg s=1-s$，$s\rightarrow t=\min(1,1-(s-t))$，$s\leftrightarrow t=1-|s-t|$，$s\wedge_2 t=\max(0,s+t-1)$，$s\vee_2 t=\min(1,s+t)$，以及量$\forall$、$\exists$规定为下确介和上确介。如像真值集一样，我们认为$W_\infty=[0,1]$，和$W_m=\{k/m-1\mid 0\leqslant K\leqslant m-1\}$，其中$k>2$（$k=2$时则给出古典逻辑）；而$L_\infty$，$L_m$是以真值集$W_\infty$，$W_m$而言的不分明逻辑。倘若考察这些逻辑中的任意一个，只举W（或L），则W^+就是$W\setminus\{0\}$。

不分明逻辑的合式公式(wff)，是按惯法由逻辑常数$\wedge_1$，$\vee_1$，$\wedge_2$，$\vee_2$，$\neg$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\forall$，$\exists$，$\forall_M$，$\exists_M$（M表不分明元素之级一参见下文），和非逻辑（双）常数ε，$\equiv$，$\approx$，$\sqsubset$，以及变量a，b，c，…，x，y，z关于不分明元素建立的。今用$[H]$表合式的公式H的真值；若要述说不分明逻辑的一个合式的公式H（强调H具有真值，是为了证明H），我们指出‘$[H]=1$’而不是‘$H=1$’，$(H)^2$乃是（$H\wedge_2 H$）的缩写。

不分明集的类M，是从$\bigcup_r$元素集$R(0)$用累积法（见［6］）构造的，它们本身都是非不

分明集。规定不分明元素的类E是：$E = M \cup R(0)$。对于不分明元素的每个类M：$V_M \cdots = \inf_{x\in M} \cdots$，及$\exists_M \cdots = \sup_{x\in M}\cdots$；而$V$，$\exists$乃是$V_E$，$\exists_E$的缩写。又$\varepsilon$是不分明隶属度，$\sqsubset$是不分明秩关系（见[6]）。对于不分明集$A$，$B$则有：$A \approx B =_{df} Vx(x\varepsilon A \leftrightarrow x\varepsilon B)$，$A\sqsubseteq B =_{df} Vx(x\varepsilon A \rightarrow x\varepsilon B)$，$A\equiv B =_{df} A\approx B \wedge_2 (A\subset B\wedge_2 B\subset A)$。不分明序对具有性质

$$\langle a,\ b\rangle \equiv \langle c,\ d\rangle \leftrightarrow a\equiv c\wedge_1 b\equiv d$$

对于不分明逻辑的每个合式的公式$H(X)$，把它理解成一个不分明集，而$\{x\,\|\,H(x)\}$是使不分明集A对每个$a\in E$具有$a\ \varepsilon\ A\leftrightarrow H(a)$。对于各个$a\in E$和$t\in W$不分明单子表为$[\![a]\!]_t = \{x\,\|\,x\equiv a\wedge_2 t\}$，特殊地是$[\![a]\!] = [\![a]\!]_1$·对于不分明集的集$M$，我们设$\bigcup M =_{df} \{x\,\|\,\exists_M y\,(x\ \varepsilon\ y)\}$。一个不分明集$A$的生成元，是一个具有不分明元素集$E$和$\tau$：$E\rightarrow W^+$所成之对$(E,\ \tau)$，而且使得$A = \bigcup\{[\![x]\!]_{\tau(x)}\,|\,x\in E\}$。

一个不分明映射F是一不分明集，它存在着不分明序对的不分明单子的某些集M，且具有$F = \bigcup M$。此外，$F^{-1} = \{x\,\|\,\exists y\,\exists z(x\equiv\langle y,\ z\rangle\wedge_2\langle z,\ y\rangle\varepsilon F)\}$，和$F^{(1)}\langle A\rangle = \{x\,\|\,\exists y(y\ \varepsilon\ A\wedge_1\langle y,x\rangle\varepsilon F)\}$。又$\varnothing(F) = \{x\,\|\,\exists y(\langle x,y\rangle\varepsilon F)\}$与$\mathscr{R}(F) = \{y\,\|\,\exists x(\langle x,y\rangle\varepsilon F)\}$。倘若$E$只含不分明序对，则$F$有一满意的生成元$(E,\ \tau)$。

所有这些概念已在[8]中引用，而更多的概念均在不分明集论中出现。

例如不分明包括$\sqsubseteq$之传递性的性质是

$$A\sqsubseteq B\wedge_2 B\sqsubseteq C\rightarrow A\sqsubseteq C$$

今后，用符号□标记证明的结束，而⇒，$\wedge$，$\vee$在古典逻辑中标志着推断、一般化和特殊化。

3. 不分明映射的唯一性

如引论中所述，首先认为不分明唯一性可能有四种表述。同法我们要引进一对一函数概念的不分明化。为此目的，设i，j在[1，2]内变化；F常为一个不分明映射。

定义3·1 对于任意F，i，j，令

(a) $\bigcup n_{i,j}(F) =_{df} VxVyVuVv((\langle x,\ u\rangle\varepsilon F\wedge_i\langle y,\ v\rangle\varepsilon F)\wedge_j x\equiv y\rightarrow u\equiv v)$，

(b) $\bigcup n^{(2)}_{i,j}(F) =_{df} \bigcup n_{i,j}(F)\wedge_1\bigcup n_{i,j}(F^{-1})$。

事实上，$H_1\wedge_2 H_2$常是暗指$H_1\wedge_1 H_2$，立即给出不分明连接关系

$$\bigcup n_{1,1}(F)\nearrow^{\bigcup n_{1,2}(F)}_{\searrow \bigcup n_{2,1}(F)}\ \bigcup n_{2,2}(F),$$

亦即，在该图表中的每个不分明连接关系具有值1。我们也有同一的图表常用$\bigcup n^{(2)}$代替$\bigcup n$。在所有这些情形下，通常仅是单一的不分明连接关系，而不是不分明双连接关系。

推论3.2 对于每个F，则有

(i) $\bigcup n_{i,j}(F)\leftrightarrow VxVyVuVv((\langle x,u\rangle\varepsilon F^{-1}\wedge_i\langle y,v\rangle\varepsilon F^{-1})\wedge_j u\equiv v\rightarrow x\equiv y)$，

(ii) $\bigcup n^{(2)}_{i,j}(F)\leftrightarrow\bigcup n^{(2)}_{i,j}(F^{-1})$。

证明. (ii)是显而易见。对于(i)，注意任意不分明元素x，y这件事（见[8]），以及

$$\langle x,y\rangle\varepsilon F\leftrightarrow\langle y,x\rangle\varepsilon F^{-1}.\quad □$$

推论3.3 对于每个F，则有

(i) $\bigcup n_{i,2}(F) \leftrightarrow \forall x \forall y \forall u \forall v((\langle x,u\rangle \varepsilon F \wedge_i \langle y,v\rangle \varepsilon F) \rightarrow (x \equiv y \rightarrow u \equiv v))$,

(ii) $\bigcup n_{i,2}^{(2)}(F) \leftrightarrow \forall x \forall y \forall u \forall v((\langle x,u\rangle \varepsilon F \wedge_i \langle y,v\rangle \varepsilon F \rightarrow (x \equiv y \leftrightarrow u \equiv v))$.

证明:按照不分明逻辑,由于定义3.1(a)和推论3.2(i),如应用下面合式的公式是有效的:

$$\forall x\varphi(x) \wedge_1 \forall x \psi(x) \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \wedge_1 \psi(x)),$$

$$(\varphi \wedge_2 \psi \rightarrow x) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow x)),$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow x)) \wedge_1 (\varphi \rightarrow (x \rightarrow \psi)) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow x)). \quad \square$$

下面,我们仅研究这些不分明唯一概念之一:$\bigcup n_{2,2}$。这就给出不分明函数概念的最大扩充。此外,迄今更多的结果对于这种情况都是可知的;例如,存在一个集的通常对角线的不分明化—但不是一切不分明集的不分明对角线具有$\bigcup n_{i,j}$以1为值的性质,然而对于这种不分明集仅只$\bigcup n_{2,2}$的一个特性是可知的,即是该不分明集的对角线具有$\bigcup n_{2,2}$以1为值的性质。在后面,我们只用$\bigcup n$,$\bigcup n^{(2)}$代替$\bigcup n_{2,2}$,$\bigcup n_{2,2}^{(2)}$。

定理3.4.设I是一不分明元素集,$(a_i)_{i\in I}$和$(b_i)_{i\in I}$是不分明元素族,同时$(\tau_i)_{i\in I}$是一个真值族,并认为

$$F = \bigcup \{ [\![\langle a_i, b_i\rangle]\!]_{\tau_i} | i \in I \}.$$

则有

(i) $\forall_1 i \forall_1 j(\tau_i \wedge_2 \tau_j \rightarrow a_i \not\equiv a_j \vee_1 b_i \equiv b_j) \rightarrow \bigcup n(F)$,

(ii) $\forall_1 i \forall_1 j(\tau_i \wedge_2 \tau_j \rightarrow (a_i \not\equiv a_j \vee_1 b_i \equiv b_j) \wedge_1 (a_i \equiv a_j \vee_1 b_i \equiv b_j)) \rightarrow \bigcup n^{(2)}(F)$.

证明:首先我们引进一些缩式,并写成:

$\varphi(i,j)$ 代替 $\tau_i \wedge_2 \tau_j \rightarrow a_i \not\equiv a_j \vee_1 b_i \equiv b_j$,

$\psi(i,j;x,y)$ 代替 $\langle x_1,y_1\rangle \equiv \langle a_i,b_i\rangle \wedge_2 \langle x_2,y_2\rangle \equiv \langle a_j,b_j\rangle$.

我们又用$(\forall)$代替$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2$。因此证明(i)即意味着证明

$$\forall_1 i \forall_1 j \varphi(i,j) \rightarrow (\forall)(\langle x_1,y_1\rangle \varepsilon F \wedge_2 \langle x_2,y_2\rangle \varepsilon F \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \rightarrow y_1 \equiv y_2).$$

但按F的规定,常有

$$\langle x,y\rangle \varepsilon F \leftrightarrow \exists_1 k(\langle x,y\rangle \equiv \langle a_k,b_k\rangle \wedge_2 \tau_k),$$

于是,我们必须证明

$$\exists_1 i \exists_1 j(\forall) \forall_1 k \forall_1 l(\varphi(i,j) \wedge_2 \psi(k,l;x,y) \wedge_2 \tau_k \wedge_2 \tau_l \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \rightarrow y_1 \equiv y_2),$$

显然,对于每个k,$l \in I$和一切不分明元素x_1, x_2,y_1, y_2能足以证明

$$\varphi(k,l) \wedge_2 \psi(k,l;x,y) \wedge_2 \tau_k \wedge_2 \tau_l \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \rightarrow y_1 \equiv y_2.$$

由于不分明逻辑,可从上式知道

$$\varphi(k,l) \wedge_2 (\tau_k \wedge_2 \tau_l) \rightarrow a_k \not\equiv a_l \vee_1 b_k \equiv b_l$$

总是有真值1,因此足以证明

$$(a_K \not\equiv a_l \vee_1 b_K \equiv b_l) \wedge_2 \psi(k,l;x,y) \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \rightarrow y_1 \equiv y_2.$$

情形 I. $[a_K \not\equiv a_l] \leqslant [b_K \not\equiv b_l]$,现在显然是

$$\psi(k,l;x,y) \rightarrow y_1 \equiv b_K \wedge_2 y_2 \equiv b_l,$$

倘若我们能证

$$b_K \equiv b_l \wedge_2 y_1 \equiv b_K \wedge_2 y_2 \equiv b_l \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \rightarrow y_1 \equiv y_2,$$

时,则算是完成了证明。但这是不分明恒等≡的不分明传递的一个明显结果。

情形 II. $[a_K \not\equiv a_l] > [b_K \equiv b_l]$,应用那个式子,则有

$$\psi(k,l;x,y) \rightarrow x_1 \equiv a_K \wedge_2 x_2 \equiv a_l,$$

倘若能证

$$a_K \not\equiv a_1 \wedge_2 x_1 \equiv a_K \wedge_2 x_2 \equiv a_1 \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \to y_1 \equiv y_2.$$

时，就算完成了证明。

但

$$[a_K \not\equiv a_1 \wedge_2 x_1 \equiv a_K \wedge_2 x_2 \equiv a_1 \wedge_2 x_1 \equiv x_2] \leqslant [a_K \not\equiv a_1 \wedge_2 a_K \equiv a_1] = 0.$$

于是，(i)的证明算是完成。对(ii)仅只再加上逻辑规则即可。 □

推论3.5 对任意a，b：$\bigcup n^{(2)}([\langle a,b\rangle])$.

命题3.6 对不分明映射F，G，则有

(i) $(F \subseteq G)^2 \to (\bigcup n(G) \to \bigcup n(F))$,

(ii) $(F \subseteq G)^2 \to (\bigcup n^{(2)}(G) \to \bigcup n^{(2)}(F))$.

证明：(i)让我们用$\bigcup(F,G)$表示合式的公式

$$(\langle x_1, y_1\rangle \varepsilon F \wedge_2 \langle x_2, y_2\rangle \varepsilon G \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \to y_1 \equiv y_2)$$

再令(V)为$Vx_1 Vx_2 Vy_1 Vy_2$，因此，由不分明逻辑

$$F \subseteq G \to (V)(\bigcup(G,G) \to \bigcup(G,F)),$$
$$F \subseteq G \to (V)(\bigcup(G,F) \to \bigcup(F,F)).$$

事实上

$$(\varphi \to \psi) \vee_2 (\varphi \to \chi) \to (\varphi \wedge_2 \varphi \to \psi \wedge_2 \chi)$$

是一不分明命题逻辑的永真式（见[7]或[5]），今由不分明蕴涵的传递性，就有

$$(F \subseteq G)^2 \to (V)(\bigcup(G,G) \to \bigcup(F,F)),$$

且再由不分明逻辑，所得

$$(F \subseteq G)^2 \to ((V)\bigcup(G,G) \to (V)\bigcup(F,F)).$$

就是(i)式。

(ii)应用(i)，事实是$F \subseteq G \leftrightarrow F^{-1} \subseteq G^{-1}$，以及不分明永真式

$$(\varphi_1 \to \psi_1) \wedge_1 (\varphi_2 \to \psi_2) \to (\varphi_1 \wedge_1 \varphi_2 \to \psi_1 \wedge_1 \psi_2)$$

便可证得。 □

定理3.7. 对每个F，则有

$$\bigcup n(F) \leftrightarrow V_M A(F^{(2)}\langle (F^{-1})^{(2)}\langle A\rangle\rangle \subseteq A).$$

证明：不分明像点的定义（[8]，定义7.1）与F^{-1}之性质，就对每个不分明元素x给出

$$x \,\varepsilon\, F^{(2)}\langle (F^{-1})^{(2)}\langle A\rangle\rangle \leftrightarrow \exists y\, \exists z(y \,\varepsilon\, A \wedge_2 \langle z,y\rangle \varepsilon F \wedge_2 \langle z,x\rangle \varepsilon F).$$

因此，我们必须证明

$$\bigcup n(F) \leftrightarrow V_M A V x V y V z(y \,\varepsilon\, A \wedge_2 \langle z,y\rangle \varepsilon F \wedge_2 \langle z,x\rangle \varepsilon F \to x \,\varepsilon\, A).$$

在古典逻辑中，欲证这个不分明等价性，须证两个不分明蕴涵关系。我们应用下面的缩写：$Vxyz$ 代替 $VxVyVz$，(V) 代替 $Vx_1Vx_2Vy_1Vy_2$，$(\exists)$ 代替 $\exists x_1 \exists x_2 \exists y_1 \exists y_2$，$\varphi_F(a,b,c,d)$ 代替 $\langle a,b\rangle \varepsilon F \wedge_2 \langle c,d\rangle \varepsilon F$。

$(\to)$、因为$\bigcup n(F)$与A无关，我们只需要证明

$$\bigcup n(F) \to F^{(2)}\langle (F^{-1})^{(2)}\langle A\rangle\rangle \subseteq A, \tag{1}$$

然而按不分明逻辑它都等价于

$$Vxyz(\exists)((\varphi_F(x_1,y_1,x_2,y_2) \wedge_2 x_1 \equiv x_2 \to y_1 \equiv y_2) \wedge_2 \varphi_F(z,y,z,x) \wedge_2 y \,\varepsilon\, A \to x \,\varepsilon\, A). \tag{2}$$

我们选取任意不分明元素 a, b, c, 且设 $x_1=x_2=c$, $y_1=b$, $y_2=c$。今若

$$(\varphi_F(c,b,c,a)\to a\equiv b)\wedge_2\varphi_F(c,b,c,a)\wedge_2 b\ \varepsilon\ A\to a\ \varepsilon\ A. \quad (3)$$

但从下述二式

$$(\varphi_F(c,b,c,a)\to a\equiv b)\wedge_2\varphi_F(c,b,c,a)\to a\equiv b,$$

$$a\equiv b\wedge_2 b\ \varepsilon\ A\to a\ \varepsilon\ A,$$

则有（3），于是证得了（1）式

（←） 我们必须证明

$$V_M A V xyz(\varphi_f(z,y,z,x)\wedge_2 y\ \varepsilon\ A\to x\ \varepsilon\ A)\to \bigcup \mathrm{n}(F), \quad (4)$$

或等价式

$$(V)\ \exists_M A\ \exists xyz((\varphi_F(z,y,z,x)\wedge_2 y\ \varepsilon\ A\to x\ \varepsilon\ A)$$
$$\wedge_2\varphi_F(x_1,y_1,x_2,y_2)\wedge_2 x_1\equiv x_2\to y_1\equiv y_2) \quad (5)$$

我们再选取任意不分明元素 a, b, c, 且特设：

$A=[b]$, $x=d$, $y=b$, $z=a$。今若有式子

$$(\varphi_F(a,b,a,d)\wedge_2 b\ \varepsilon\ [b]\to d\ \varepsilon\ [b])$$
$$\wedge_2\varphi_F(a,b,c,d)\wedge_2 a\equiv c\to b\equiv d,$$

则（5）被证。上式等价于

$$(\varphi_F(a,b,a,d)\to d\equiv b)\wedge_2\varphi_F(a,b,c,d)\wedge_2 a\equiv c\to b\equiv d. \quad (6)$$

但对于不分明序对

$$a\equiv c\leftrightarrow\langle a,d\rangle\equiv\langle c,\ d\rangle$$

从而有

$$a\equiv c\wedge_2\langle c,d\rangle\ \varepsilon\ F\to\langle a,d\rangle\ \varepsilon\ F$$

且又有

$$a\equiv c\wedge_2\varphi_F(a,b,c,d)\to\varphi_F(a,b,a,d)$$

于是得到（6）式，随之就有（4）式。于是据（1）和（4）二者便证实了本定理。 □

命题3.8. 对每个F, G, 则有

$$\bigcup \mathrm{n}(F)\wedge_2\bigcup \mathrm{n}(G)\to\bigcup \mathrm{n}(G\circ_2 F)$$

证明： 如像［8,定义6.8］的推论，对于不分明元素a, b, 则有

$$\exists z(\langle a,z\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle z,b\rangle\ \varepsilon\ G)\to\langle a,b\rangle\ \varepsilon\ G\circ_2 F.$$

我们应用φ_F和像在定理 3.7 证明中的(V), 以及 $Vx_1'Vx_2'Vy_1'Vy_2'$之缩写(V'), 则有

$$\bigcup \mathrm{n}(F)\wedge_2\bigcup \mathrm{n}(G)$$
$$\to(V)(\varphi_F(x_1,y_1,x_2,y_2)\wedge_2 x_1\equiv x_2\to y_1\equiv y_2)$$
$$\wedge_2(V')(x_1'\equiv x_2'\to(\varphi_G(x_1',y_1',x_2',y_2')\to y_1'\equiv y_2'))$$
$$\to(V)(V')((\varphi_F(x_1,y_1,x_2,y_2)\wedge_2 x_1\equiv x_2\to y_1\equiv y_2)$$
$$\wedge_2(y_1\equiv y_2\to(\varphi_G(y_1,y_1',y_2,y_2')\to y_1'\equiv y_2')))$$
$$\to(V)(V')(\varphi_F(x_1,y_1,x_2,y_2)\wedge_2 x_1\equiv x_2$$
$$\to(\varphi_G(y_1,y_1',y_2,y_2')\to y_1'\equiv y_2'))$$
$$\to(V)(V')(\varphi_F(x_1,y_1',x_2,y_2')\wedge_2 x_1\equiv x_2\wedge_2\varphi_G(y_1',y_1,y_2',y_2)\to y_1\equiv y_2$$
$$\to(V)(\exists y_1'(\langle x_1,y_1'\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle y_1',y_1\rangle\ \varepsilon\ G)$$
$$\wedge_2\exists y_2'(\langle x_2,y_2'\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle y_2',y_2\rangle\ \varepsilon\ G)\wedge_2 x_1\equiv x_2\to y_1\equiv y_2)$$

$\rightarrow \bigcup n(G\circ_2 F)$.

今由不分明蕴涵的传递性，就得到了命题之结论。 □

而对应于结果中的 $G\circ_1 F$ 则失效（见[5,p.118]）.

推论3.9 对每个F，G，则有

$$\bigcup n^{(2)}(F)\wedge_2\bigcup n^{(2)}(G)\rightarrow\bigcup n^{(2)}(G\circ_2 F)$$

证明：由不分明逻辑和定义3.1.b，则有

$$\bigcup n^{(2)}(F)\wedge_2\bigcup n^{(2)}(G)\rightarrow(\bigcup n(F)\wedge_2\bigcup n(G)\wedge_1(\bigcup n(F^{-1})\wedge_2\bigcup n(G^{-1})).$$

今用命题3.8和$(G\circ_2 F)^{-1}=F^{-1}\circ_2 G^{-1}$（见[8]）这样一个事实，便可得证。 □

命题3.10 对于每个F，则有

$$\bigcup n(F)\leftrightarrow \forall a\forall x\forall y(x\ \varepsilon\ F^{(2)}\langle[a]\rangle\wedge_2 y\ \varepsilon\ F^{(2)}\langle[a]\rangle\rightarrow x\equiv y).$$

证明：令R标记该不分明等价式的右方。按照不分明像点的定义（见[8]），则有

$$x\ \varepsilon\ F^{(2)}\langle[a]\rangle\leftrightarrow\exists u(u\equiv a\wedge_2\langle u,x\rangle\ \varepsilon\ F).$$

因此，当φ_F具有像定理3.7证明中的那样时，则有

$$R\leftrightarrow\forall a\forall x\forall y\forall u\forall v(\varphi_F(u,x,v,y)\wedge_2 u\equiv a\wedge_2 a\equiv v\rightarrow x\equiv y).$$

现在，我们先用：$u\equiv a\wedge_2 a\equiv v\rightarrow u\equiv v$，次取 $a=u$；则给出下面＝式：

$$\bigcup n(F)\rightarrow R,\qquad\qquad R\rightarrow\bigcup n(F).$$ □

引理3.11 对于每个不分明集A，则有

$$\exists a((A\sqsubseteq[a])^2)\rightarrow\forall x\forall y(x\ \varepsilon\ A\wedge_2 y\ \varepsilon\ A\rightarrow x\equiv y).$$

证明：选取任意的a，而有

$$(A\sqsubseteq[a])^2\rightarrow\forall x(x\ \varepsilon\ A\rightarrow x\equiv a)\wedge_2\forall y(y\ \varepsilon\ A\rightarrow y\equiv a)$$
$$\rightarrow\forall x\forall y(x\ \varepsilon\ A\wedge_2 y\ \varepsilon\ A\rightarrow x\equiv a\wedge_2 a\equiv y).$$

今用：$x\equiv a\wedge_2 a\equiv y\rightarrow x\equiv y$，与‘$a$’事实上仅出现在前项里。 □

命题3.12 对于每个F，则有

$$\forall a\exists b((F^{(2)}\langle[a]\rangle\sqsubseteq[b])^2)\rightarrow\bigcup n(F).$$

证明：使用命题3.10和引理3.11可证。 □

定义3.13 一个不分明函数当且仅当$[\bigcup n(F)]=1$时称作不分明映射F；然而当且仅当$[\bigcup n^{(2)}(F)]=1$时，则称作不分明双映射。

现在希望给出不分明函数和不分明双映射的特性。

4．不分明函数的特性

下述考虑有用于引进E上测度的概念。我们设

$$\rho(a,b)=_{df}[a\not\equiv b].$$

引理4.1 (E,ρ)是一测度空间。

证明：对于一切不分明元素a，b，按照≡的定义当且仅当$a=b$时，才有$[a\equiv b]=1$；也只在这种情况下，才会有$\rho(a,b)=0$（也可见[6]）。显然常有$\rho(a,b)=\rho(b,a)$。最后当且仅当

$$[a\equiv c]\leqslant[a\equiv b]+[b\equiv c]-1$$

时，有

$$\rho(a,c)\leqslant\rho(a,b)+\rho(b,c)$$

而当且仅当

$$[\![a\equiv b\wedge_2 b\equiv c\to a\equiv c]\!] = 1$$

时，它常为真。 □

用同一法定义

$$\rho'(a,b)=_{df}[\![a\not\approx b]\!]$$

（E，ρ'）也是一测度空间，而对一切不分明元素 a，b：

$$\rho'(a,b)\leqslant\rho(a,b)$$

二测度 ρ，ρ' 以 I 为最大距离，且在E的每个元素具有相同秩的子集上它们相一致。

测度空间（E,ρ'）是完备的，但（E,ρ）却不是；（E,ρ）中一个无极限的哥西序列已在[8]的定理 3.9 的证明中构造出来。

引理4.2 设不分明元素 a，b 且使 $b\sqsubset a$，则存在一个不分明元素c使得 $a\,\Box\,c$ 与$\rho(a,c)=\rho'(a,b)$。

证明：首先假定存在如此 $x\in|a|$以致使得$[\![x]\!]\Box a$。今选取 y 具有 $y\Box x$ 和 $\rho(x,y)=1$，亦即$[\![y\equiv x]\!]=0$，考察真值 $t=[\![x\,\varepsilon\, a]\!]$ 并设 $c=b\cup_1[\![y]\!]_t$。易见 $\rho(a,c)=\rho'(a,b)$与$a\Box c$。

次假定不存在这样的一个 x，但有一序数α 和一不分明元素 $x_\xi\in|a|$之序列$(x_\xi)_{\xi<\alpha}$以致使得：$\bigcup\{[\![x_\xi]\!]|\xi<\alpha\}\Box a$，而对每个$\xi<\alpha$有 $b\sqsubset x_\xi$，以及当$\xi<\zeta<\alpha$时，$x_\xi\sqsubset x_\zeta$。现在选取一个常使 $x_\xi\Box y_\xi$ 与 $\rho(x_\xi,y_\xi)=1$ 的不分明元素序列$(y_\xi)_{\xi<\alpha}$，以及符合 $0<t\leqslant\rho'(a,b)$之真值 t。则对于 $c=b\cup_1\bigcup\{[\![y_\xi]\!]_t|\xi<\alpha\}$还有 $a\,\Box\,c$ 与 $\rho(a,c)=\rho'(a,b)$。

第三种情形是 $a=\phi$。于是 b 是一$\cup_r$元素，由此 $\rho'(a,b)=1$，且能选取 $c=[\![b]\!]$。 □

主要引理4.3 已知任意不分明元素 a,b,c,d，则存在不分明元素 x_1,x_2,y_1,y_2，使得：

(i) $\rho(a,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,c)=\rho(a,c)$，

(ii) $\rho(y_1,b)+\rho(b,d)+\rho(d,y_2)=\rho(y_1,y_2)$，

(iii) $\rho(a,x_1)=\rho(b,y_1)$与$\rho(c,x_2)=\rho(d,y_2)$，

(iv) $\rho(x_1,x_2)=0$ 或$\rho(y_1,y_2)=1$。

证明：若有$\rho(a,c)=0$ 或$\rho(b,d)=1$时，我们就取 $x_1=a$，$x_2=c$，$y_1=b$ 和$y_2=d$ 即可。所以，我们假定 $a\neq c$，亦即 $\rho(a,c)>0$ 与 $\rho(b,d)\neq 1$。

令$E_1,\cdots,E_4$按次为a，b，c，d 之生成集。我们先建立 y_1 和 y_2

情形 I．存在着某 $y_0\in E_2\cup E_4$ 使得

$$[\![b\equiv d]\!]=1-|[\![y_0\,\varepsilon\, b]\!]-[\![y_0\,\varepsilon\, d]\!]|.$$

不失一般性，我们可假定$[\![y_0\,\varepsilon\, b]\!]\geqslant[\![y_0\,\varepsilon\, d]\!]$，因此有

$$[\![b\equiv d]\!]=1-[\![y_0\,\varepsilon\, b]\!]+[\![y_0\,\varepsilon\, d]\!].$$

今欲要$[\![y_1\equiv y_2]\!]\leqslant[\![b\equiv d]\!]$，因此设法得$[\![y_0\,\varepsilon\, y_1]\!]\geqslant[\![y_0\,\varepsilon\, b]\!]$与$[\![y_0\,\varepsilon\, y_2]\!]\leqslant[\![y_0\,\varepsilon\, d]\!]$，但必须记住

$$[\![y_0\,\varepsilon\, y_1]\!]-[\![y_0\,\varepsilon\, b]\!]\leqslant\rho(a,c)$$

和建立的 y_1 一起，对 y_2 也有

$$[\![y_0\,\varepsilon\, d]\!]-[\![y_0\,\varepsilon\, y_2]\!]\leqslant\rho(a,c)-\rho(b,y_1).$$

所以，我们取 $\delta=[\![y_0\,\varepsilon\, b\vee_2 a\not\equiv c]\!]$ 和 $y_1=b\cup_1[\![y_0]\!]_\delta$，且有

$$y_0\,\varepsilon\, y_1\leftrightarrow y_0\,\varepsilon\, b\vee_2 a\not\equiv c.$$

要建立 y_2，我们须得更谨慎些。要使 $[y_0 \varepsilon y_2]$ 尽可能小，则在 y_2 中不足以给出 y_0 使有较小的隶度值，但也许有某些别的 $z \in |d|$ 在 y_2 中如同在 d 中会有较小的隶属度值。在每种情形下，它必须是 $[z \varepsilon y_2] \leqslant [y_0 \varepsilon y_2] + [z \neq y_0]$，该式与 $[y_0 \equiv z \wedge_2 z \varepsilon y_2 \rightarrow y_0 \varepsilon y_2] = 1$ 等价，否则，予定隶属度值 $[y_0 \varepsilon y_2]$ 是不可能的。因此，我们选取

$$[z \varepsilon y_2] = \min([y_0 \varepsilon y_2] + [z \neq y_0],\ [z, d])$$

而且

$$[y_0 \varepsilon y_2] = [y_0 \varepsilon d] - \min([y_0 \varepsilon d], \rho(a,c) - \rho(b,y_1))$$

和

$$\rho(b,y_1) = \min(\rho(a,c),\ [y_0 \notin b])$$

一起，我们通过基本变换

$$z \varepsilon y_2 \leftrightarrow z \varepsilon d \wedge_1 (z \neq y_0 \vee_2 (y_0 \varepsilon d \wedge_2 (y \notin b \vee_2 a \equiv c))).$$

则把这个不分明等价式右方的真值标记成 $t(z)$。于是我们设

$$y_2' = \bigcup \{[\![z]\!]_{t(z)} \mid z \in E_4\}.$$

显然 $y_2' \subset d$. 在 $y_2' \square d$ 的情形下，设 $y_2 = y_2'$; 在 $y_2' \sqsubset d$ 的情形下，按照引理 4.2 选取一个 y_2，而引理 4.2 的证明指出，就是使 $[y_0 \varepsilon y_2'] = [y_0 \varepsilon y_2]$ 这样的办法而言是可以选到 y_2 的；按照这种证明也照样有 $[y_1 \equiv y_2'] = [y_1 \equiv y_2]$。

我们的构造法导致

$$[y_1 \equiv b] = 1 - [y_0 \varepsilon y_1] + [y_0 \varepsilon b].$$

$$[y_2' \equiv d] = 1 - [y_0 \varepsilon d] + [y_0 \varepsilon y_2'].$$

由此有

$$\rho(b,y_1) = [y_0 \varepsilon y_1] - [y_0 \varepsilon b]$$

$$\rho(d,y_2') = \rho(d,y_2) = [y_0 \varepsilon d] - [y_0 \varepsilon y_2'] = [y_0 \varepsilon d] - [y_0 \varepsilon y_2].$$

但我们也有

$$[y_1 \equiv y_2] = 1 - [y_0 \varepsilon y_1] + [y_0 \varepsilon y_2],$$

所以按 y_0 的选法而得

$$\rho(y_1,b) + \rho(b,d) + \rho(d,y_2) = \rho(y_1,y_2).$$

情形 2 . 不存在 $y_0 \in E_2 \cup E_4$ 使得

$$[b \equiv d] = 1 - |[y_0 \varepsilon b] - [y_0 \varepsilon d]|.$$

这仅当 $W = W_\infty = [0, 1]$ 时是可能的。但是,现在却存在着 $E_2 \cup E_4$ 之元素序列 $(y_0^i)_{i<\omega}$，使当

$$\tau_i = 1 - |[y_0^i \varepsilon b] - [y_0^i \varepsilon d]|$$

时，这个真值序列 $(\tau_i)_{i<\omega}$ 为严格单调减，且其极限是 $[b \equiv d]$。此外，我们可假定：(α) 每个序列 $([y_0^i \varepsilon b])_{i<\omega}$，$([y_0^i \varepsilon d])_{i<\omega}$ 都有一极限，(β) 不失一般性可有

$$\lim_{i\to\infty} [y_0^i \varepsilon b] > \lim_{i\to\infty} [y_0^i \varepsilon d],$$

(γ) 对每个 $i < \omega$，$[y_0^i \varepsilon b] > [y_0^i \varepsilon d]$。

现在，类似于情形 I 选取 y_1 和 y_2；特殊地，可使那里的仍然有效。我们设 $\sigma_i = [y_0^i \varepsilon b \vee_2 a \neq c]$ 与

$$y_1 = b\bigcup_1 \bigcup\{[\![y_0^i]\!]_{\delta_i} | i<\omega\},$$

以及真值

$$t(z) = [\, z\ \varepsilon\ d \wedge_1 Vi(z \not\equiv y_0^i \vee_2 (y_0^i\ \varepsilon\ d \wedge_2 (y_0^i \not\varepsilon\ b \vee_2 a \equiv c)))\,]$$

又

$$y_2' = \bigcup\{[\![z]\!]_{t(z)} | z\in E_4\}$$

仍然是 $y_2'\subset d$。在 $y_2'\square d$ 的情形下，设 $y_2 = y_2'$；在情形 $y_2' \sqsubset d$ 下，按照引理4.2选取 y_2。而引理 4.2 的证明指出，就是使得 $[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_2'\,] = [\, y_0^i\ \varepsilon\ y_2\,]$ 与 $[\, y_1 \equiv y_2'\,] = [\, y_1 \equiv y_2\,]$ 之法而言也可选到 y_2 的。

今按构造法有

$$\rho(b, y_1) = \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_1] - \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ b\,],$$

$$\rho(d, y_2) = \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ d\,] - \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_2\,],$$

因为二极限 $\lim[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_1\,]$ 与 $\lim[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_2\,]$ 都存在，此外

$$\rho(y_1, y_2) = \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_1] - \lim_{i\to\infty}[\, y_0^i\ \varepsilon\ y_2\,]$$

由此推得

$$\rho(y_1, b) + \rho(b, d) + \rho(d, y_2) = \rho(y_1, y_2)$$

按照 y_1, y_2 在两种情形下的构造法，象是得一推论：

$$\rho(y_1, b) + \rho(d, y_2) = \min(\rho(a, c),\ 1 - \rho(b, d))$$

如此(ii)得证。我们也有 $\rho(b, y_1) \leqslant \rho(a, c)$ 与 $\rho(d, y_2) \leqslant \rho(a, c) - \rho(b, y_1)$

让我们从 x_1，x_2的构造入手。对x_1希望有 $\rho(a, x_1) + \rho(x_1, c) = \rho(a, c)$ 与 $\rho(a, x_1) = \rho(b, y_1)$。所以我们试对具有 $[\, z\ \varepsilon\ a\,] > [\, z\ \varepsilon\ c\,]$ 的所有已知 $z\in E_1$，就 x_1 而言隶属度值 $[\, z\ \varepsilon\ a\,] - \rho(b, y_1)$。但对这些 z 必须满足 $[\, z\ \varepsilon\ x_1\,] \geqslant [\, z\ \varepsilon\ c\,]$。

因此，我们设

$$\tau(z) = \begin{cases} [(z\ \varepsilon\ a \wedge_2 y_1 \equiv b) \vee_1 z\ \varepsilon\ c], & \text{当且仅当}[z\ \varepsilon\ a] \geqslant [z\ \varepsilon\ c]\text{时}, \\ [(z\ \varepsilon\ a \vee_2 y_1 \not\equiv b) \wedge_1 z\ \varepsilon\ c], & \text{当且仅当}[z\ \varepsilon\ a] < [z\ \varepsilon\ c]\text{时}, \end{cases}$$

且又

$$x_1' = \bigcup\{[\![z]\!]_{\tau(z)} | z\in E_1 \cup E_3\}.$$

按照构造法，对每个 $z\in E_1\cup E_3$ 有：

$$|[z\ \varepsilon\ a] - \tau(z)| = \min(\rho(b, y_1),\ |[z\ \varepsilon\ a] - [z\ \varepsilon\ c]|),$$

且又

$$\tau(z) = [z\ \varepsilon\ x_1'].$$

这二个事实的第一个是显然的，对第二个假定相反，让 x_0，$z_0\in E_1\cup E_3$ 使得

$$\tau(x_0) < [x_0 \equiv z_0 \wedge_2 \tau(z_0)].$$

假若 $\tau(z_0) \leqslant [z_0\ \varepsilon\ a]$，则有

$$[x_0\ \varepsilon\ a] \geqslant [z_0\ \varepsilon\ a \wedge_2 x_0 \equiv z_0] > \tau(x_0)$$

因此推得

$$\begin{aligned}[x_0\ \varepsilon\ a] - \tau(x_0) &> [z_0\ \varepsilon\ a \wedge_2 x_0 \equiv z_0] - [\tau(z_0) \wedge_2 x_0 \equiv z_0] \\ &= [z_0\ \varepsilon\ a] + [x_0 \equiv z_0] - 1 - (\tau(z_0) + [x_0 \equiv z_0] - 1) \\ &= [z_0\ \varepsilon\ a] - \tau(z_0),\end{aligned}$$

所以据第一个事实

$$[z_0 \varepsilon a] - \tau(z_0) \neq \rho(b, y_1),$$

即是

$$[z_0 \varepsilon a] - \tau(z_0) = [z_0 \varepsilon a] - [z_0 \varepsilon c],$$

因此得 $\tau(z_0) = [z_0 \varepsilon c]$。刚才

$$\tau(x_0) < [x_0 \equiv z_0 \wedge_2 \tau(z_0)] \leqslant [x_0 \equiv c],$$

是相反的。在 $\tau(z_0) > [z_0 \varepsilon a]$的情形下，由 $\tau(z)$的定义则有 $\tau(z_0) \leqslant [z_0 \varepsilon c]$，因此又

$$\tau(x_0) < [x_0 \equiv z_0 \wedge_2 z_0 \varepsilon c] \leqslant [x_0 \varepsilon c];$$

是再一次相反。如此则有 $\tau(z) = [z \varepsilon x_1']$。

二事实同时给出 $\rho'(a, x_1') \leqslant \rho(b, y_1)$。但是，假若希望 $\rho'(a, x_1') < \rho(b, y_1)$，则对于每个 $z \in E_1 \cup E_3$，有 $|[z \varepsilon a] - \tau(z)| = |[z \varepsilon a] - [z \varepsilon c]|$，因此 $\rho(a, c) < \rho(b, y_1)$；相反的话，则 $\rho'(a, x_1') = \rho(b, y_1)$。现在，按照引理4.2选取 x_1，且使得有 $\rho(a, x_1) = \rho'(a, x_1')$

按 x_2 的构造，对于每个 $z \in E_1 \cup E_3$ 我们规定

$$\sigma(z) = \begin{cases} [(z \varepsilon c \wedge_2 y_2 \equiv d) \vee_1 z \varepsilon x_1'], & \text{当且仅当}[z \varepsilon c] \geqslant [z \varepsilon x_1'] \\ [(z \varepsilon c \wedge_2 y_2 \not\equiv d) \wedge_1 z \varepsilon x_1'], & \text{当且仅当}[z \varepsilon c] < [z \varepsilon x_1'] \end{cases}$$

且设

$$x_2' = \bigcup \{ [z]_{\sigma(z)} | z \varepsilon E_1 \cup E_3 \}$$

如同对 x_1' 的方法，能证得 $\rho'(c, x_2') = \rho(d, y_2)$， 和选取满足 $\rho'(c, x_2') = \rho(c, x_2)$ 与 $\rho'(x_1', x_2') = \rho(x_1, x_2)$的$x_2$。由构造法显有

$$\rho'(a, x_1') + \rho'(x_1', x_2') + \rho'(x_2', c) = \rho(a, c),$$

于是(i)(iii)成立

又证（iv），假定 $\rho(x_1, x_2) \neq 0$，亦即 $\rho'(x_1', x_2') \neq 0$，

现有

$$\begin{aligned} 0 < \rho(x_1, x_2) &= \rho(a, c) - (\rho(b, y_1) + \rho(d, y_1)) \\ &= \rho(a, c) - \min(\rho(a, c), \ 1 - \rho(b, d)), \end{aligned}$$

则得 $\qquad \rho(b, y_1) + \rho(d, y_2) = 1 - \rho(b, d)$与$\rho(y_1, y_2) = 1$。 □

定理4.4 一个不分明映射F是一个不分明函数，当且仅当F有一适当的生成元（E，τ）使得

$$\forall_E \langle a, b \rangle \forall_E \langle c, d \rangle (\tau(\langle a, b \rangle) \wedge_2 \tau(\langle c, d \rangle) \rightarrow a \not\equiv c \vee_1 b \equiv d). \qquad (1)$$

证明：假定（1）成立，则由定理3.4 F是一不分明函数。现在，假定（1）对F的任意适当的生成元不满足。因此，我们可选取不分明序对$\langle a, b \rangle$，$\langle c, d \rangle \in$ E，及F的任意生成元（E，τ），使得

$$[\tau(\langle a, b \rangle) \wedge_2 \tau(\langle c, d \rangle) \rightarrow a \not\equiv c \vee_1 b \equiv d] < 1,$$

亦即使得

$$[\tau(\langle a, b \rangle) \wedge_2 \tau(\langle c, d \rangle)] > \max([a \not\equiv c], [b \equiv d]). \qquad (2)$$

条件（2）是等价于

$$[\tau(\langle a, b \rangle) \wedge_2 \tau(\langle c, d \rangle)] > [b \equiv d], \qquad (3)$$

$$[\tau(\langle a, b \rangle) \wedge_2 \tau(\langle c, d \rangle) \wedge_2 a \equiv c] > 0. \qquad (4)$$

的结合式。对于这些不分明元素 a，b，c，d，我们认为 x_1，x_2，y_1，y_2 能使得引理4.3的

(i)—(iv)是真实的。

又考察真值

$$t=[\langle x_1,y_1\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle x_2,y_2\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2 x_1\equiv x_2\rightarrow y_1\equiv y_2].$$

假若指定 $t<1$，此证明将可告成。但因为有

$$[\langle x_1,y_1\rangle\equiv\langle a,b\rangle\wedge_2\tau(\langle a,b\rangle)]\leqslant[\langle x_1,y_1\rangle\ \varepsilon\ F],$$

$$[\langle x_2,y_2\rangle\equiv\langle c,d\rangle\wedge_2\tau(\langle c,d\rangle\leqslant[\langle x_2,y_2\rangle\ \varepsilon\ F],$$

就足以证实

$[\langle x_1,y_1\rangle\equiv\langle a,b\rangle\wedge_2\langle x_2,y_2\rangle\equiv\langle c,d\rangle\wedge_2 x_1\equiv x_2\wedge_2\tau(\langle a,b\rangle)\wedge_2\tau(\langle c,d\rangle)]>[y_1\equiv y_2]$因此用 $s=[\tau(\langle a,b\rangle)\wedge_2\tau(\langle c,d\rangle)]$时，必须证明

$$\min([a\equiv x_1],\ [b\equiv y_1]+\min([c\equiv x_2],\ [d\equiv y_2])+[x_1\equiv x_2]+s-3>[y_1\equiv y_2],$$

该式等价于

$$\max(\rho(a,x_1),\ \rho(b,y_1)+\max(\rho(c,x_2),\ \rho(d,y_2)) +\rho(x_1,x_2)-s<-[y_1\equiv y_2]. \tag{5}$$

因（5）是

$$\rho(a,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,c)-s<-[y_1\equiv y_2], \tag{6}$$

的充分条件，且也是

$$\rho(b,y_1)+\rho(d,y_2)+\rho(x_1,x_2)-s<-[y_1\equiv y_2]. \tag{7}$$

的充分条件．公式（6）与

$$[y_1\equiv y_2]<[a\equiv c\wedge_2 s], \tag{8}$$

等价，且公式（7）与

$$[b\equiv d]<[x_1\equiv x_2\wedge_2 s]. \tag{9}$$

等价。

按照 x_1，x_2，y_1，y_2 的取法，则有：$\rho(x,x_2)=0$ 或$\rho(y_1,y_2)=1$，也就是$[x_1\equiv x_2]=1$，或$[y_1\equiv y_2]=0$．在$[x_1\equiv x_2]=1$情形下，(9)是(3)的结果；在$[y_1\equiv y_2]=0$的情形下，(8)是(4)的结果。为此对于(5)的每种情形，该定理的第二部分得证。 □

推论4.5 一个不分明映射F是一不分明函数，当且仅当（1）式对F的每个适当的生成元（E,τ）保持真实。

证明：假定（1）对F的每个适当生成元真实，则F是一不分明函数，这是因为存在着F的一个适当生成元之故

否则，设F是一不分明函数，（E,τ）是F的某适当生成元，由此（1）有真值≠1．按照定理4.4的证明，F是一非不分明函数。此为一矛盾。 □

推论4.6 一个不分明映射F是一不分明函数，当且仅当

$$\forall a\forall b\forall c\forall d(\langle a,b\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle c,d\rangle\ \varepsilon\ F\rightarrow a\not\equiv c\wedge_1 b\equiv d).$$

证明：应用所存在的函数 τ，使得$(|F|\cap E^2,\tau)$是F之一适当的规范生成元．(此处E^2是一不分明序对类，应用定理4.4可证。 □

推论4.7 一个不分明映射F^{-1}是一不分明函数，当且仅当F有一适当生成元(E,τ)使得

$$\forall_E\langle a,b\rangle\forall_E\langle c,d\rangle(\tau(\langle a,b\rangle)\wedge_2\tau(\langle c,d\rangle)\rightarrow a\equiv c\vee_1 b\not\equiv d), \tag{10}$$

且又当且仅当（10）对F的每个适当生成元也为真实。

证明：用定理4.4和推论4.5可证。 □

推论4.8　一个不分明映射F是一不分明双射，当且仅当F有一适当生成元（E，τ）使得

$$V_E\langle a,b\rangle V_E\langle c,d\rangle(\tau(\langle a,b\rangle)\wedge_2\tau(\langle c,d\rangle)\to(a\not\equiv c)\vee_1 b\equiv d)$$
$$\wedge_1(a\equiv c\vee_1 b\not\equiv d)), \qquad (11)$$

且又当且仅当（11）对F的每个适当生成元为真实。

证明：用不分明逻辑，定理4.4以及推论4.5和4.7可证。　□

对于定理4.4之条件（1）像推论4.6的处理法，当避免论及生成元时，也可把最后两推论的组成给予简化。

5．不分明集的对角线

定义5.1　不分明集A之对角线（A上的不分明恒等映射）规定为

$$Id\ A=_{df}\{x\|\exists y(y\ \varepsilon\ A\wedge_2 x\equiv\langle y,y\rangle)\}.$$

它是不分明映射。

命题5.2　对于每个不分明集A，则

i）$(IdA)^{-1}=IdA$；

ii）$\bigcup n(IdA)\leftrightarrow\bigcup n^{(2)}(IdA)$；

iii）假若（E，τ）是不分明集A的一生成元，就有　$IdA=\bigcup\{[\langle a,a\rangle]_{\tau(a)}|a\in E\}$.

证明：证明是直截了当的。　□

定理5.3　设若（E，τ）是不分明集A的生成元，则对角线IdA是一不分明双射的必充条件为

$$V_E a V_E b(\tau(a)\wedge_2\tau(b)\to a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b). \qquad (12)$$

证明：IdA是一不分明双射当且仅当它是一不分明函数。此外，巳知(E,τ)，对于IdA的一个适当生成元$\{(\langle a,a\rangle,\ \tau(a))|a\in E\}$）（$\{\langle a,a\rangle|a\in E\}$，$\{(\langle a,a\rangle,\ \tau(a))|a\in E\}$），则用定理4.4可证。　□

再如最后部分里，(12)对A的一个生成元为真的必充条件是它对A的每个生成元都为真。

推论5.4　IdA是不分明双射，当且仅当

$$VaVb(a\ \varepsilon\ A\wedge_2 b\ \varepsilon\ A\to a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b)$$

证明：显而易见。　□

推论5.5　考虑不分明元素a，b，则

i）$Id[a,b]$是不分明双射，当且仅当$a\equiv b\vee_1 a\not\equiv b$.

ii）可以选得这样的a，b以致使$Id[a,b]$是非不分明双射.

证明：据定理5.3知i）是显而易见。

对ii），设s是满足$0<s<1$的真值，并选取适合$[a\equiv b]=s$之a，b，则由定理5.3可知$Id[a,b]$是非不分明函数。　□

推论5.6　设A是使IdA是一不分明双射，（E，τ）为A的生成元，且$(y_x)_{x\in E}$是一个具有$x\equiv z\leftrightarrow y_x\equiv y_z$（$x,z\in E$）的不分明元素族，则不分明映射给为

$$\bigcup\{[x,y_x]_{\tau(x)}|x\in E\}.$$

证明：用定理5.3和定理4.4可证。　□

定理5.7　对于每个不分明集A，IdA是一不分明双射的必充条件是存在一个不分明双

射具有$\mathscr{D}(F)=A$。

证明：若IdA是一不分明双射，显有$\mathscr{D}(IdA)=A$。因此可假定那个F是一不分明双射，于是$\mathscr{D}(F)=A$。今对每个a，b，则

$$a\ \varepsilon\ A\wedge_2 b\ \varepsilon\ A \rightarrow \exists c\,\exists d(\langle a,c\rangle\ \varepsilon\ F\wedge_2\langle b,d\rangle\ \varepsilon\ F)$$
$$\rightarrow \exists c\,\exists d((a\not\equiv b\vee_1 c\equiv d)\wedge_1(a\equiv b\vee_1 c\not\equiv d)),$$

这是因$\mathscr{D}(F)=A$与$\bigcup(^2_1)(F)$之故。但也有

$$(a\not\equiv b\vee_1 c\equiv d)\wedge_1(a\equiv b\vee_1 c\not\equiv d)\rightarrow a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b; \tag{13}$$

若当$[a\not\equiv b]\leqslant[c\equiv d]$，则(13)等价于实式

$$c\equiv d\wedge_1 a\equiv b\rightarrow a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b;$$

且若$[a\not\equiv b]>[c\equiv d]$，则(13)等价于实式

$$a\not\equiv b\wedge_1 c\not\equiv d\rightarrow a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b$$

因此

$$a\ \varepsilon\ A\wedge_2 b\ \varepsilon\ A\rightarrow \exists c\,\exists d(a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b)$$
$$\rightarrow a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b,$$

于是由推论5.4推得IdA是不分明双射。 □

推论5.8 对于每个不分明集A，IdA是一不分明双射的必充条件乃是存在着一个适合$\mathscr{R}(F)=A$的不分明双射F。

证明：应用推论3.2(ii)有：$\mathscr{D}(F^{-1})=\mathscr{R}(F)$，以及定理5.7可得证。 □

最后定理暗示所有不分明集类，其对角线是不分明双射，在现在的情况下所考虑的也可能是独立的，如像不分明基数理论的发展。

定义5.9 把所有对角线是一不分明双射的那些不分明集A的类记成M^*。

命题5.10 对于每个不分明集A，则$A\notin M^*$之必充条件是存在着不分明元素a，b满足

$$[a\ \varepsilon\ A\wedge_2 b\ \varepsilon\ A]>[a\not\equiv b\vee_1 a\equiv b]$$

证明：由推论5.4显见。 □

如早先，今把附有$A\notin M^*$为特征之条件作为对于A的任意生成元来处理，不详述了。

命题5.11 对于不分明集A，B，设若$A\subseteq B$，$B\in M^*$，则$A\in M^*$。

证明：应用命题5.10可证。 □

命题5.12 对于不分明集A，$B\in M^*$，

i) 若当$[\exists x(x\ \varepsilon\ A\wedge_2 x\ \varepsilon\ B)]=0$，则$A\cup_1 B\in M^*$，

ii) $A\cap_1 B\in M^*$，

iii) $A\times_1 B\in M^*$。

证明：i)考虑任意元素$a,b\in|A\cup_1 B|$。假若$a,b\in|A|$或若$a,b\in|B|$时，则无须证明，而若$a\in|A|,b\in|B|$或$a\in|B|$，$b\in|A|$时，即刻得$[a\ \varepsilon\ A\cup_1 B\wedge_2 b\ \varepsilon\ A\cup_1 B]=0$；因此由推论5.4得$A\cup_1 B\in M^*$。

ii) 显然$A\cap_1 B\subseteq A$；应用命题5.10得证。

iii) 不分明元素a，b，c，d按照不分明笛卡儿积$A\times_1 B$[见[8]]的定义，并使用

$$(p_1\wedge_1 p_2)\wedge_2(q_1\wedge_1 q_2)\rightarrow(p_1\wedge_2 q_1)\wedge_1(p_2\wedge_2 q_2)$$

则有一不分明命题逻辑的重复(见[7])：

$$\langle a,b\rangle\in A\times_1 B\wedge_2\langle c,d\rangle\in A\times_1 B\rightarrow(a\in A\wedge_1 b\in B)\wedge_2(c\in A\wedge_1 d\in B)$$

$\rightarrow(a\in A\wedge_2 c\in A)\wedge_1(b\in B\wedge_2 d\in B)$

$\rightarrow(a\not\equiv c\vee_1 a\equiv c)\wedge_1(b\not\equiv d\vee_1 b\equiv d)$

$\rightarrow(a\equiv c\vee_1 b\equiv d)\vee_1 a\not\equiv c\wedge_1 b\not\equiv d$

$\rightarrow\langle a,b\rangle\equiv\langle c,d\rangle\vee_1\langle a,b\rangle\not\equiv\langle c,d\rangle.$

因此由推论5.4推得 $A\times_1 B\in M^*$ □

6. 不分明集的不分明等价性

今用不分明双射对不分明集规定不分明等价性的概念。通常某些不分明双射的存在是关键——等价传递性是一不费力的推论。但在现在的情况下，虽有推论3.9，然$\circ_1$却无相应的结果；在另一方面（见[8]），对于不分明映射叠代法选择$\circ_1$比$\circ_2$要好得多。因此不分明等价性的特点在于不分明双射的某些有限序列的存在，这就消除使用$\circ_1$的麻烦，保存了传递性。

定义6.1 设kor是不分明双射的所有有限序列类，对于每个$F=(f_1,\cdots,f_n)\in\text{kor}$，令

$$Q(F)=_{df}\mathscr{D}(f_1),\qquad Z(F)=_{df}\mathscr{R}(f_N).$$

且对$(f_1,\cdots f_n)$，$(g_1,\cdots,g_m)\in\text{kor}$，则令

$$(f_1,\cdots,f_n)\cdot(g_1,\cdots,g_m)=_{df}(f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_m).$$

显然，kor是包含全体不分明双射（与长度为1之序列等同）以及关于定义6.1中乘法的最小类，此外，对$F\in\text{kor}$也常有$Q(F)$，$Z(F)\in M^*$；且对$F_1,F_2,F_3\in\text{kor}$有：$F_1\cdot(F_2\cdot F_3)=(F_1\cdot F_2)\cdot F_3$。因此，在下述定义中用递推法是恰当的。

定义6.2 ket是不分明一元属性，ket*在kor上。对每个不分明双射f具有真值1：$[\text{ket}(f)]=[\text{ket}^*(f)]=1$；并对每个$F\in\text{kor}$，规定

$$\text{ket}(F\cdot f)=_{df}\text{ket}(F)\wedge_2 Z(F)\approx\mathscr{D}(f),$$

$$\text{ket}^*(F\cdot f)=_{df}\text{ket}^*(F)\wedge_2 Z(F)\sqsubseteq\mathscr{D}(f).$$

推论6.3 对一切F_1，$F_2\in\text{kor}$，则有

i) $\text{ket}(F_1\cdot F_2)\leftrightarrow\text{ket}(F_1)\wedge_2\text{ket}(F_2)\wedge_2 Z(F_1)\approx Q(F_2)$,

ii) $\text{ket}^*(F_1\cdot F_2)\leftrightarrow\text{ket}^*(F_1)\wedge_2\text{ket}^*(F_2)\wedge_2 Z(F_1)\sqsubseteq Q(F_2)$.

证明：显见。 □

推论6.4 对不分明集A，B，则有

$$A\sim B=_{df}\exists_{\text{kor}}F(\text{ket}(F)\wedge_2 A\approx Q(F)\wedge_2 B\approx Z(F)),$$

$$A\preccurlyeq B=_{df}\exists_{\text{kor}}F(\text{ket}^*(F)\wedge_2 A\sqsubseteq Q(F)\wedge_2 Z(F)\sqsubseteq B).$$

定理6.5 对不分明集A，B，则有

i) $A\preccurlyeq B\leftrightarrow\exists_{\text{kor}}F(\text{ket}(F)\wedge_2 A\approx Q(F)\wedge_2 Z(F)\sqsubseteq B)$,

ii) $A\preccurlyeq B\leftrightarrow\exists X(A\sim X\wedge_2 X\sqsubseteq B)$.

证明：i)因$A\approx Q(F)\rightarrow A\sqsubseteq Q(F)$与$\text{ket}(F)\rightarrow\text{ket}^*(F)$常正确，于是（←）部分显而易见。现在指定任意实数$\delta>0$，并依此法选取$F$或$F=(f_1,\cdots,f_n)$以致使得

$$|[A\preccurlyeq B]-[\text{ket}^*(F)\wedge_2 A\sqsubseteq Q(F)\wedge_2 Z(F)\sqsubseteq B]|<\delta.$$

引一简略的记法符号，下面是对每个不分明映射H的规定：

$$H^\circ=_{df}\bigcup\{[\langle x,y\rangle]_{[\langle x,y\rangle\in H]}\mid\langle x,y\rangle\in|H|\},$$

以及对每个不分明M又有

$$H \upharpoonright M =_{df} (H \cap_1 (M \times_1 \mathscr{R}(H)))^\circ.$$

毫不费力的，可由这些概念证得：

$$\bigcup n(H) \leftrightarrow \bigcup n(H^\circ),$$

$$\bigcup n(H) \leftrightarrow \bigcup n(H \upharpoonright M).$$

根据F，用

$$g_1 =_{df} f_1 \upharpoonright A,$$

$$g_{i+1} =_{df} f_{i+1} \upharpoonright \mathscr{R}(g_i) \qquad 1 \leqslant i < n$$

定义$G = (g_1, \cdots, g_n)$.显然$G \in \text{kor}$.此外,$\varnothing(g_1) = \varnothing(f_1) \cap_1 A$与$\varnothing(g_{i+1}) = \varnothing(f_{i+1}) \cap_1 \mathscr{R}(g_i)$，因此常有$\mathscr{R}(g_i) \sqsubseteq \mathscr{R}(f_i)$。为此按$g_1$的选法有

$$A \sqsubseteq \varnothing(f_1) \leftrightarrow A \approx \varnothing(g_1),$$

且对一切$1 \leqslant i < n$

$$\varnothing(f_i) \sqsubseteq \varnothing(f_{i+1}) \to \mathscr{R}(g_i) \sqsubseteq \varnothing(f_{i+1}).$$

从而

$$\mathscr{R}(f_i) \sqsubseteq \varnothing(f_{i+1}) \to \mathscr{R}(g_i) \approx \varnothing(g_{i+1}).$$

因此　$A \sqsubseteq Q(F) \leftrightarrow A \approx Q(G)$ 与 $\text{ket}^*(F) \to \text{ket}(G)$。因为又有 $Z(G) \sqsubseteq Z(F)$，则得

$$[A \preccurlyeq B \to \exists_{Kor} G(\text{ket}(G) \wedge_2 A \approx Q(G) \wedge_2 Z(G) \sqsubseteq B)] \geqslant 1 - \delta,$$

于是(i)之(→)得证．现在(ii)也是一易得的推论．　□

推论6.6　对不分明集A，B，则有

i) $A \in M^* \Longleftrightarrow A \sim A \Longleftrightarrow A \preccurlyeq A \Longleftrightarrow \exists X(A \sim X)$,

ii) $A \preccurlyeq B \Longrightarrow A \in M^* \Longrightarrow \exists X(A \preccurlyeq X)$.

证明：由定理6.5和相应的定义可证．　□

推论6.7　对不分明集A，B，C，则有

i) $A \approx B \to A \sim B \to A \preccurlyeq B$,

ii) $A \sim B \to B \sim A$,

iii) $A \sim B \wedge_2 B \sim C \to A \sim C$,

iv) $(A \approx B \wedge_2 B \sim C) \vee_1 (A \sim B \wedge_2 B \approx C) \to A \sim C$.

证明：由推论3.2(ii)与相应之定义可证．　□

推论6.8　对不分明集A，B，C，则有

i) $A \preccurlyeq B \wedge_2 B \preccurlyeq C \to A \preccurlyeq C$,

ii) $(A \sim B \wedge_2 B \preccurlyeq C) \vee_1 (A \preccurlyeq B \wedge_2 B \sim C) \to A \preccurlyeq C$.

证明：由定理6.5　□

推论6.9　对不分明集A，B，C，则有

i) $A \times_t B \sim B \times_t A$,

ii) $A \times_t (B \times_t C) \sim (A \times_t B) \times_t C$.

证明：应用推论5.6　□

引理6.10　设$A \in M^*$与不分明双射f，令

$$f \perp_t A =_{df} \bigcup \{[\langle\langle x,z\rangle, \langle y,z\rangle\rangle]_{\langle x,y\rangle \varepsilon f \wedge_t z \varepsilon A} \mid \langle x,y\rangle \in |f| \text{与} z \in |A|\}.$$

则 $f \perp_t A$ 是一不分明双射，且具有 $\varnothing(f \perp_t A) = \varnothing(f) \times_t A$ 与 $\mathscr{R}(f \perp_t A) = \mathscr{R}(f) \times_t A$.

证明：由 $f\perp_{\iota}A$的定义，可得知该映射的一个适当生成元。利用推论 4.8；并考虑不分明元素$x_i, y_i, z_i (i=1,2)$，当应用于 f 和 IdA时，则推论 4.8 给出

$$(\langle x_1,y_1\rangle\,\varepsilon\, f\wedge_{\iota} z_1\,\varepsilon\, A)\wedge_2(x_2,y_2\rangle\,\varepsilon\, f\wedge_{\iota} z_2\,\varepsilon\, A)$$

$$\to(\langle x_1,y_1\rangle\,\varepsilon\, f\wedge_2\langle x_2,y_2\rangle\,\varepsilon\, f)\wedge_{\iota}(z_1\,\varepsilon\, A\wedge_2 z_2\,\varepsilon\, A)$$

$$\to(x_1\equiv x_2\vee_1 y\ \not\equiv y_2)\wedge_1(x_1\not\equiv x_2\vee_1 y_1\equiv y_2)\wedge_1(z_1\equiv z_2\vee_1 z_1\not\equiv z_2)$$

$$\to(\langle x_1,z_1\rangle\equiv\langle x_2,z_2\rangle\vee_1\langle y_1,z_1\rangle\not\equiv\langle y_2,z_2\rangle)$$

$$\wedge_1(\langle x_1,z_1\rangle\not\equiv\langle x_2,z_2\rangle\vee_1\langle y_1,z_1\rangle\equiv\langle y_2,z_2\rangle).$$

又由推论 4.8 $f\perp_{\iota}A$ 是一不分明双射，此外

$$\mathscr{D}(f\perp_{\iota}A)=\bigcup\{[\![\langle x,z\rangle]\!]_{[\langle x,y\rangle\varepsilon f\wedge_{\iota} z\varepsilon A]}\,|\,\langle x,y\rangle\in|f|\text{与}z\in|A|\}$$

$$=\bigcup\{[\![\langle x,z\rangle]\!]_{[x\varepsilon\mathscr{D}(f)\wedge_{\iota} z\varepsilon A]}\,|\,x\in do|f|\text{与}z\in|A|\}$$

$$=\mathscr{D}(f)\times_{\iota}A$$

由$\times_{\iota}$的定义，此处 $do|f|$是$|f|$的径典域。同法有 $\mathscr{R}(f\perp_{\iota}A)=\mathscr{R}(f)\times_{\iota}A$. □

命题6.11 对不分明集 A, B, C, D，则

$$A\sim C\wedge_2 B\sim D\to A\times_1 B\sim C\times_1 D.$$

证明：对不分明集 A, A', B，足可证

$$A\sim A'\to A\times_1 B\sim A'\times_1 B,$$

因为由于该命题带来之便，选取任意实数 $\delta>0$ 与 $F=(f_1,\cdots,f_n)F\in\text{kor}$ 且使得

$$|[A\sim A']-[\text{ket}(F)\wedge_2 A\approx Q(F)\wedge_2 Z(F)\approx A']|<\delta.$$

设想 $G=(f_1\perp_1 B,\cdots,f_n\perp_1 B)$，由引理 6.10，则$G\in\text{kor}$. 按照$\times_1$ 关于$\sqsubseteq$的单调（见[8]之命题 5.5），对每个 $1\leqslant i<n$ 则有

$$A\approx Q(F)\to A\times_1 B\approx Q(F)\times_1 B,$$

$$A'\approx Z(F)\to A'\times_1 B\approx Z(F)\times_1 B,$$

$$\mathscr{R}(f_1)\approx\mathscr{D}(f_{i+1})\to\mathscr{R}(f_i)\times_1 B\approx\mathscr{D}(f_{i+1})\times_1 B.$$

因此由引理6.10

$$\text{ket}(F)\to\text{ket}(G),$$

同时由于 $Q(G)=Q(F)\times_1 B$与$Z(G)=Z(F)\times_1 B$，也有

$$[A\sim A'\to\text{ket}(G)\wedge_2 A\times_1 B\approx Q(G)\wedge_2 Z(G)\approx A'\times_1 B]\geqslant 1-\delta.$$

所以（14）成立。 □

命题6.12 （L_n, n有限）. 对不分明集 A, B, C, D，则有

$$A\sim C\wedge_2 B\sim D\to AX_2 B\sim CX_2 D$$

证明：可在最后的证明中继续做下去。但须得利用［8］之命 5.6 代替 5.5 □

7. 不分明基数

根据推论 6.6 和 6.7，则$\sim$在 M^*中是一不分明等价关系。但因M^* 是一独特类，可知$\sim$在M^*中的等价类是非不分明集。如此，当前情况在古典 ZF 集论里接近一致。有不同方法去克服那个困难：例如定义基数为原始的（v. 诺埃曼）序数，或者每个集M之基数，像是所有最低秩集的集等价于M.

很难见到如何把第一次提到的接近于不分明集一般化．较易的设想是第二种之一一般化，特别是因为我们已经有不分明秩关系$\sqsubset$。但可惜，假若在该第二法里定义（由于秩受到限制）不分明集A，B的不分明基数Card A，Card B，那么，很自然的性质

$$A\sim B\leftrightarrow \text{Card } A\approx \text{Card } B$$

却遭破坏，因此必须产生别的逼近。

我们记得的这种办法，范畴论有时是见效并有重要类别：某些相应领域的应用．在古典集论中，举如领域都是λ难得接近的那些秩集$R(\lambda)$。因此，我们也假设那个λ将是难能接近原始序数，并设

$$V^* = M^* \cap R(\lambda),$$

$R(\lambda)$为［6］里定义的那样（还可参见［8］）。现在，V^*是一个集，$\sim$乃是V^*里的一个不分明等价关系——这个关系的等价类选为不分明基数．

定义7.1 对每个不分明集$A\in V^*$，令

$$\text{Card } A =_{df} \{X\in V^* \| A\sim X\}.$$

$$\text{Card} =_{df} \{\text{Card } A | A\in V^*\}.$$

推论7.2 对不分明集A，$B\in V^*$，则有

$$\text{Card } A\approx \text{Card } B\leftrightarrow A\sim B.$$

证明：由定义7.1可证． □

对于每个$m\in$ Card和各$A\in V^*$，当$m=\text{Card}A$时，我们称A为m的表示式。因$A\in V^*$，而由$A\sim A$，则每个$m\in$Card有一表示式。进一步，A是m之表示式的必充条件为$[A\,\varepsilon\, m]=1$．

定义7.3 对于一切m，$n\in$Card和一切M，$N\in V^*$，当$m=\text{Card}M$,$n=\text{Card}N$时，令

$$m\leqslant n =_{df} M\preccurlyeq N.$$

据推论6.8，该定义与m，n之表示式的选取无关．

命题7.4 对一切不分明基数m，n，$\tau\in$ Card，则有

i）$\text{Card}\phi\leqslant m$,

ii）$m\approx n\rightarrow m\leqslant n$,

iii）$m\leqslant n\wedge_2 n\leqslant\tau\rightarrow n\leqslant\tau$,

iv）$(m\approx n\wedge_2 n\leqslant\tau)\vee_1(m\leqslant n\wedge_2 n\approx\tau)\rightarrow m\leqslant\tau$.

证明：据定义7.3以及推论6.7和6.8可证． □

特别地，据命题7.4(ii)则知$\leqslant$在Card中是一自反的不分明关系，因此是一不分明拟序（见［4］）．但$\leqslant$是非不分明部分有序化，因为Cantor-Bernstein定理的不分明化见解受到破坏．从这点看，让我们选取真值$1\neq s\in W^+$，与不分明元素（古典）集M_K的一个序列$(M_K)_{K<\omega}$，且使得适合$K<\omega$的每个M_K具有：

$$x,y\in M_K\Rightarrow[x\equiv y]=s$$

且对K_1，$K_2<\omega$，在$K_1\neq K_2$的情况下

$$x\in M_{K_1}\text{和}y\in M_{K_2}\Rightarrow[x\equiv y]=0\text{与}[x\square y]=1.$$

认定

$$A=\bigcup\{[\![x]\!]|_{K<\omega}\vee(x\in M_{2(K+1)})\},$$

$$B=\bigcup\{[\![x]\!]|_{K<\omega}\vee(x\in M_{2K+1})\}.$$

又认定古典集 $A^1=\{x|\bigvee_{K<\omega}(x\in M_{2(K+1)})\}$ 与 $B^1=\{x|\bigvee_{K<\omega}(x\in M_{2K+1})\}$。现在易见每个不分明映射$F$具有$\mathscr{D}(F)=A$，$\mathscr{R}(F)=B$，而古典映射 $F^1=\{\langle x,y\rangle|[\langle x,y\rangle\ \varepsilon\ F]=1\}$ 却有$do(F^1)=A^1$与$Rg(F^1)=B^1$。又若F是不分明双射，则F^1是 1 - 1 映射。

但因每个不分明双射F与每个 $\langle x_i,y_i\rangle$ 具有 $[\langle x_i,y_i\rangle\ \varepsilon\ F]=1$，$i=1,2$，则由推论 3.3 有：$[x_1\equiv x_2]=[y_1\equiv y_2]$。因此，按$M_K$的组成，存在着非不分明双射$F$具有$\mathscr{D}(F)=A$，$B=\mathscr{R}(F)$。此外还有 $A\leqslant B$ 和 $B\leqslant A$。

所以存在着 m，$n\in$ Card，例如$m=$ Card A，$n=$ Card B，且使得

$$[m\leqslant n\wedge_2 n\leqslant m\rightarrow m\approx n]<1$$

其次，可在 card 中定义通常的算术运算。

定义7.5 对 m，n Card 表示的M，N，令

$$M\otimes_t N=_{df}\mathrm{Card}(M\times_t N)。$$

命题7.6 对于m，n，r，$p\in$ Card，则有

i) $m\otimes_2 n\leqslant m\otimes_1 n$，

ii) $m\otimes_t n\approx n\otimes_t m$，

iii) $m\otimes_t(n\otimes_t r)\approx(m\otimes_t n)\otimes_t p$，

iv) $m\approx n\wedge_2 r\approx p\rightarrow m\otimes_t r\approx n\otimes_t p$，

v) $m\leqslant n\wedge_2 r\leqslant p\rightarrow m\otimes_t r\leqslant n\otimes_t p$。

证明：由$\times_t$，$\leqslant$，$\sim$之性质可得。 □

更需要关心的是Card 中加法的规定。

引理7.7 对于来自不分明元素集I上V^*中之不分明集的每个族$(A_i)_{i\in I}$，存在着来自于V^*的一个不分明集族$(B_i)_{i\in I}$，且使得

$$A_i\sim B_i,\qquad i\neq j\Rightarrow|B_i|\cap|B_j|=\phi\qquad i,j\in I$$

证明：选取一个来自于V^*的不分明元素族$(a_i)_{i\in I}$，且具有 $i\neq j\Rightarrow[a_i\square a_j]=0$ 与$A_i\sqsubset a_i$，常设

$$B_i=\bigcup\{[\langle x,a_i\rangle]_{(x\varepsilon A_i)}|x\in|A_i|\}。$$

显然，常有 $B_i\in V^*$与$i\neq j\Rightarrow|B_i|\cap|B_j|=\phi$，又设

$$f_i\bigcup\{[\langle x,\langle x,a_i\rangle\rangle]_{(x\varepsilon A_i)}|x\in|A_i|\}。$$

今有$\mathscr{D}(f_i)=A_i$与$\mathscr{R}(f_i)=B_i$，且由推论 3.3 则知各f_i是一不分明双射。 □

引理7.8 对于不分明集A，A'，B，且具有 $|A|\cap|B|=|A'|\cap|B|=\phi$，则

$$A\sim A'\rightarrow A\cup_1 B\sim A'\cup_1 B。$$

证明：选取任意实数 $\delta>0$ 与 $F=(f_1,\cdots,f_n)\in$ kor 且使得

$$|[A\sim A']-[\mathrm{ket}(F)\wedge_2 A\approx Q(F)\wedge_2 Z(F)\approx A']|<\delta。$$

像那证明之末的构造法，能构造一个不分明集B^*与一不分明双射h，使得：$\mathscr{D}(h)=B$，$\mathscr{R}(h)=B^*$，$|B^*|\cap|A|=|B^*|\cap|A'|=\phi$，且常有$|B^*|\cap|\mathscr{D}(f_i)|=|B^*|\cap|\mathscr{R}(f_i)|=\phi$。

设 $g_i=f_i\cup_1 IdB^*$ 与 $G=(g_1,\cdots,g_n)$。显而易见，$Q(G)=Q(F)\cup_1 B^*$ 与 $Z(G)=Z(F)\cup_1 B^*$。此外，g_i常是一不分明双射，为此，由推论 4.8 与f_i，IdB^*都是不分明双射的事实，可证

$$\langle a,c\rangle\ \varepsilon\ f_i\wedge_2\langle b,b\rangle\ \varepsilon\ IdB^*\rightarrow(a\not\equiv b\vee_1 c\equiv b)\wedge_1(a\equiv b\vee_1 c\not\equiv b)。$$

又有充分理由证明

$$\langle a,c\rangle \varepsilon f_i \wedge_2 b \varepsilon B \rightarrow a \neq b \wedge_1 c \neq b;$$

此由B^*的选法保持真实。因此 $G\in$ kor。今易得

$$\mathrm{ket}(F)\rightarrow \mathrm{ket}(G).$$

因此由 $A\approx Q(F)\rightarrow A\cup_1 B\approx Q(G)$与 $Z(F)\approx A'\rightarrow Z(G)\approx A'\cup_1 B$，则有

$$[A\sim A'\rightarrow A\cup_1 B^*\sim A'\cup_1 B^*]\geqslant 1-\delta.$$

按照h的选法，$IdA\cup_1 h$与$IdA'\cup_1 h^{-1}$都是不分明双射，因此有 $A\cup_1 B\sim A\cup_1 B^*$与 $A'\cup_1 BA'\cup_1 B^*$。为此，最后仅只使用推论 6.7 即可。 □

定义7.9　对于 m，$n\in$ Card 与表示式M，N且满足$|M|\cap|N|=\phi$，令

$$m+n=_{df}\mathrm{Card}(M\cup_1 N).$$

对于一切不分明基数，该定义是正确的和行得通的。

命题7.10　对于 m，n，r，$p\in$Card，则有

i) $m+n\approx n+m$,

ii) $m+(n+r)\approx(m+n)+r$,

iii) $m\otimes_t(n+r)\approx(m\otimes_t n)+(m\otimes_t r)$,

iv) $m\approx n\wedge_2 r\approx p\rightarrow m+r\approx n+p$,

v) $m\leqslant n\wedge_2 r\leqslant p\rightarrow m+r\leqslant n+p$.

在此基础上，可在不分明集论中进一步开展基数计算，但我们在此不这样作。

8. 结束附记

在第一水平(集)上，我们的所有概念与通常的相合，像在不同的论文里根据不分明课题的介绍，只需要我们假设那个$\cup_t$元素恒等式仅有实值零和 1。但这是一仅有的特殊情形，关于接近我们的是：大体上，不分明恒等式的不分明否定在$\cup_t$元素间仅是一个以最大距离为 1 的测度。

在高水平上，这件事更困难，但主要的概念是很自然的：属于“几乎一样”的事都是“几乎恒等”。对于运用在人类学上的这个观点——不分明恒等式的应用——似乎是起促进作用的。

参考文献

[1] B. R. Gaines, Foundations of fuzzy reasoning, Int. J.Man-Machine Studies 8 (1976) 623—668.

[2] B.R.Gaines and L.J.Kohout,The fuzzy decade: a bibliography of fuzzy systems and closely related topics,Int.J.Man-Machine Studies 9 (1977) 1—68.

[3] R.Giles,Lukasilwicz logic and fuzzy set theory,Int.J.Man-Machine Studies 8 (1976) 313—327.

[4] S.Gottwald,Mehrwertige Anordnungsrelationen in klassischen Mengen,Math.Nachr. 63(1974) 205—212.

[5] S.Gottwald,Ein kumulatives system mehrwertiger Mengen,Habilitationsschrift,University of Leipzig, 1975.

[6] S.Gottwald, A cumulative system of fuzzy sets,Set Theory Hierarchy Theory,Mem. Tribute A. Mostowski, Bierutowice 1975,Lecture Notes Math. 537 (1976) 109—119.

[7] S.Gottwald,Fuzzy propositional logics,Fuzzy sets and systems (to appear).

[8] S.Gottwald, Set theory for fuzzy sets of higher level, fuzzy sets and Systems 2(2) (1979) 125—151.

[9] D.Klaua, Uber einen zweiten Ansatz zur mehrwertigen Mengenlehre, Monatsber.Deut.Akad.Wiss.8(1966) 161—177.

[10] C.V. Negoita and D.A.Ralescu, Applications of fuzzy sets to systems analysis (Birkhauser, Basel/Stuttgart, 1975).

[11] L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8(1965)

（房正祥　译）

紧承集下方图形与不分明集合

P.E. KLOEDEN

原文摘要

在局部紧度量空间X到单位闭区间I映射的函数空间中，通过它们在$X\times I$中紧承集下方图形（Compact supported endographs）间的Hansdorff距离定义了度量，证明在这一度量下的收敛性等价于这些函数的承集在Hansdorff度量下的收敛性外加对函数值的两个限制条件。X中非空紧子集在Hansdorff度量下形成的空间，借助于其特征函数可嵌入到上述空间中去。初步地探讨了上述结果在不分明集合论和不分明动态系统中的应用。

主要术语

下方图形（endographs），Hansdorff度量，嵌入，诱导不分明拓扑。

1. 引　言

本文讨论了定义在局部紧度量空间X上，值域为单位闭区间I的函数度量空间的性质。特别是在$X\times I$中具有非空紧承集下方图形的函数空间，其度量可借助于承集下方图形间

的Hansdorff距离来定义。在［3］中作者将利用这一空间以及它的性质来建立一种基本状态空间X上的不分明动态系统理论。

本文的结构如下：第2节叙述预备性的定义和结论；第3节证明本文的主要定理，即$X\times I$中非空紧承集下方图形序列的Hansdorff度量收敛性等价于X中其相应函数紧承集的Hansdorff度量收敛性外加对函数值的两个限制条件；第4节讨论上述函数空间的基本性质；第5节讨论上面结果与空间X上不分明集合间的关系。

2．预备知识

设(X,d)为局部紧度量空间。(C,h)以X的所有非空紧子集为元素，其Hansdorff度量h定义为

$$h(A, B)=\max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\},$$

其中

$$h^*(A, B)=\max\{d(a, B)\,|\,a\in A\}$$

$$d(a, B)=\min\{d(a, b)\,|\,b\in B\}.$$

设 $I=[0,1]$，D是$X\times I$上的乘积度量，定义为

$$D((x_1, r_1), (x_2, r_2))=\max\{d(x_1, x_2), |r_1-r_2|\}.$$

显然，$(X\times I, D)$也是局部紧度量空间。若H表示$X\times I$上非空紧子集间的Hansdorff度量，其H^*与H的定义方式类似于h^*与h。

设$\mathscr{A}$：$X\to I$是以X为定义域，以I为值域的任一函数。函数$\mathscr{A}$的承集（support）是X的子集，记为

$$\text{supp}\,\mathscr{A}=\{x\in X\,|\,\mathscr{A}(x)>0\}$$

函数$\mathscr{A}$的下方图形（endograph）是$X\times I$的子集，记为

$$\text{end}\mathscr{A}=\{(x, r)\in X\times I\,|\,\mathscr{A}(x)\geqslant r\}.$$

函数$\mathscr{A}$承集上的下方图形（supported endograph），或者简单说承集下方图形（sendograph）定义为：

$$\text{send}\mathscr{A}=\text{end}\mathscr{A}\cap\text{supp}\mathscr{A}\times I.$$

注意，当且仅当$\mathscr{A}$在X上是上半连续函数时，end$\mathscr{A}$是$X\times I$上的闭子集。同样，当且仅当$\mathscr{A}$在X上是上半连续，并且supp$\mathscr{A}$是X的闭子集时，send$\mathscr{A}$是$X\times I$上的闭子集。当且仅当$\mathscr{A}$在X上是上半连续并且supp$\mathscr{A}$是X的紧子集时，send$\mathscr{A}$是$X\times I$的紧子集。

设$\mathfrak{C}$表示send$\mathscr{A}$为$X\times I$上非空紧子集的那些函数$\mathscr{A}$：$X\to I^{(*)}$的全体，或者等价的说$\mathfrak{C}$表示在X中上半连续并且supp$\mathscr{A}$是X非空紧子集的那些函数$\mathscr{A}$：$X\to I$的全体。以后将仅就$\mathfrak{C}$中的函数进行讨论。

现在来证明一个有用的引理。设$S_\eta(A)$表示局部紧度量空间(Y, m)中子集A的η邻域，即

$$S_\eta(A)=\{y\in Y\,|\,m(y, A)<\eta\}.$$

引理 在局部紧度量空间(Y, m)中设A是闭子集，B是紧子集。若$A\cap B=\phi$，则存在$\eta=\eta(A, B)>0$，使得

$$S_\eta(A)\cap S_\eta(B)=\phi.$$

若 $A\cap B\neq\phi$，则对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\eta=\eta(A, B, \varepsilon)>0$ 使得

$$S_\eta(A)\cap S_\eta(B)\subset S_\varepsilon(A\cap B).$$

证：若上述 η 不存在，那末当 $A\cap B=\phi$ 时对于 $\eta=1, 2, 3, \cdots$ 存在

$$x_n\in S_{\frac{1}{n}}(A)\cap S_{\frac{1}{n}}(B),$$

当 $A\cap B\neq\phi$ 时还可进一步要求

$$x_n\notin S_\varepsilon(A\cap B). \qquad (2.1)$$

因为 (Y, m) 是局部紧的，B 是紧的，因此存在一个整数 N 使得 $S_{\frac{1}{N}}(B)$ 是紧的。由于对任意 $n\geqslant N$ 有

$$x_n\in S_{\frac{1}{n}}(B)\subset S_{\frac{1}{N}}(B),$$

从而存在一个收敛的子序列 $x_{n_j}\to x_0$。根据 A、B 的封闭性，显然 $x_0\in A\cap B$，这与 $A\cap B=\phi$ 矛盾。另外，对所有充分大的 n_j

$$x_{n_j}\in S_\varepsilon(x_0)\subset S_\varepsilon(A\cap B),$$

这与（2，1）矛盾。引理证毕。

(*)原文为 $\mathscr{A}$；$X\times I$，有误。——译者

3．紧承集下方图形的收敛性

集合 $\mathfrak{C}$ 中任意函数 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的承集下方图形都是 $X\times I$ 中的非空紧子集。因此，它们承集下方图形间 Hansdorff 度量意义下的距离

$$H(\text{send}\mathscr{A}, \text{send}\mathscr{B})$$

给出了函数 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 之间距离的度量。的确，由于当且仅当 $\text{send}\mathscr{A}=\text{send}\mathscr{B}$ 时才有 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$，所以这个距离正好可以用来定义 $\mathfrak{C}$ 上的一个度量。这一点将在下一节中做出，并且在第 5 节还将把这一结果应用到不分明集合的理论中去。

这一节证明本文的主要定理。这一定理表明 $\mathfrak{C}$ 中函数序列在 Hansdorff 度量 H 下承集下方图形的收敛性等价于这些函数的承集在 Hansdorff 度量 h 下的收敛性外加对函数作某种逼近的两个条件。这两个条件比函数的一致收敛条件要弱，在实际应用中这一等价性往往给工作带来很多便利之处，参看［3］.

定理 若 $\mathscr{A}$ 与序列 $\{\mathscr{A}_n\}$ 均属于 $\mathfrak{C}$，则

$$H(\text{send}\mathscr{A}_n, \text{send}\mathscr{A})\to 0$$

的充要条件是

（1） $h(\text{supp}\mathscr{A}_n, \text{supp}\mathscr{A})\to 0$,

（2） 对任意 $\varepsilon>0$，存在整数 $n(\varepsilon)$ 使得

（a） 对任意 $x\in X$，存在序列 $x_n=x_n(x, \varepsilon)\in X$，使当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时满足条件 $d(x_n, x)<\varepsilon$ 和 $\mathscr{A}_n(x)<\mathscr{A}(x_n)+\varepsilon$,

(*b*) 对任意 $x \in \operatorname{supp}\mathscr{A}$，存在序列 $x_n = x_n(x, \varepsilon) \in \operatorname{supp}\mathscr{A}$，使当 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 时满足条件 $d(x_n, x) < \varepsilon$ 和 $\mathscr{A}(x) < \mathscr{A}_n(x_n) + \varepsilon$。

证：（**必要性**）假设 $H(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) \to 0$，证明(1)，(2*a*)和(2*b*)成立。

(1) 设 $\varepsilon > 0$，$\mathscr{A}$、$\mathscr{B} \in \mathfrak{C}$，并且

$$H(\operatorname{send}\mathscr{A}, \operatorname{send}\mathscr{B}) < \varepsilon,$$

于是

$$H^*(\operatorname{send}\mathscr{A}, \operatorname{send}\mathscr{B}) < \varepsilon.$$

由于 $\operatorname{supp}\mathscr{A}$ 是紧的，所以存在 $x_a \in \operatorname{supp}\mathscr{A}$ 使得

$h^*(\operatorname{supp}\mathscr{A}, \operatorname{supp}\mathscr{B}) = d(x_a, \operatorname{supp}\mathscr{B})$。此外，$(x_a, 0) \in \operatorname{send}\mathscr{A}$，于是

$D((x_a, 0), \operatorname{send}\mathscr{B}) \leqslant H^*(\operatorname{send}\mathscr{A}, \operatorname{send}\mathscr{B}) < \varepsilon$。因为 $\operatorname{send}\mathscr{B}$ 是紧的，所以还存在 $(x_b, r_b) \in \operatorname{send}\mathscr{B}$ 使得

$D((x_a, 0), (x_b, r_b)) = D((x_a, 0), \operatorname{send}\mathscr{B}) < \varepsilon$，或者说

$$d(x_a, x_b) < \varepsilon \text{ 并且 } |r_b - 0| < \varepsilon.$$

又因为 $x_b \in \operatorname{supp}\mathscr{B}$，所以

$$h^*(\operatorname{supp}\mathscr{A}, \operatorname{supp}\mathscr{B}) = d(x_a, \operatorname{supp}\mathscr{B}) \leqslant d(x_a, x_b) < \varepsilon.$$

这表明

$$h^*(\operatorname{supp}\mathscr{A}, \operatorname{supp}\mathscr{B}) < \varepsilon,$$

由此推出

$$h(\operatorname{supp}\mathscr{A}, \operatorname{supp}\mathscr{B}) < \varepsilon.$$

这就是说当 $H(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) \to 0$ 时有 $h(\operatorname{supp}\mathscr{A}_n, \operatorname{supp}\mathscr{A}) \to 0$，因此(1)成立。

(2*a*) 对 $\varepsilon > 0$，选取 $n(\varepsilon)$ 使得当 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 时有

$H^*(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) \leqslant H(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) < \varepsilon$。设 $x \in X$。当 $n < n(\varepsilon)$ 时取 $x_n = x$。当 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 而 $x \notin \operatorname{supp}\mathscr{A}_n$ 时，由于 $\mathscr{A}(x) \geqslant 0$

$$\mathscr{A}_n(x) = 0 < \mathscr{A}(x) + \varepsilon,$$

同样取 $x_n = x$。最后，当 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 并且 $x \in \operatorname{supp}\mathscr{A}_n$ 时，$(x, \mathscr{A}_n(x)) \in \operatorname{send}\mathscr{A}_n$，并且

$D((x, \mathscr{A}_n(x)), \operatorname{send}\mathscr{A}) \leqslant H^*(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) < \varepsilon$。由于 $\operatorname{send}\mathscr{A}$ 是紧的，所以存在 $(x_n, r_n) \in \operatorname{send}\mathscr{A}$ 使得

$$D((x, \mathscr{A}_n(x)), (x_n, r_n)) = D((x, \mathscr{A}_n(x)), \operatorname{send}\mathscr{A}) < \varepsilon,$$

即

$$|\mathscr{A}_n(x) - r_n| < \varepsilon \text{ 与 } d(x_n, x) < \varepsilon.$$

由于 $(x_n, r_n) \in \operatorname{send}\mathscr{A}$，$\mathscr{A}(x_n) \geqslant r_n$，因此

$$\mathscr{A}_n(x) < r_n + \varepsilon \leqslant \mathscr{A}(x_n) + \varepsilon$$

于是对任意 n，$d(x_n, x) < \varepsilon$，对所有 $n \geqslant n(\varepsilon)$，$\mathscr{A}_n(x) < \mathscr{A}(x_n) + \varepsilon$，(2*a*) 成立。

(2*b*) 设 $\varepsilon > 0$，选取 $n(\varepsilon)$ 使得

$H^*(\operatorname{send}\mathscr{A}, \operatorname{send}\mathscr{A}_n) \leqslant H(\operatorname{send}\mathscr{A}_n, \operatorname{send}\mathscr{A}) < \varepsilon$

对所有 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 成立。设 $x \in \operatorname{supp}\mathscr{A}$，则 $(x, \mathscr{A}(x)) \in \operatorname{send}\mathscr{A}$，于是

$$D((x, \mathscr{A}(x)), \text{send}\,\mathscr{A}_n) \leqslant H^*(\text{send}\,\mathscr{A}, \text{send}\,\mathscr{A}_n) < \varepsilon. \quad (n \geqslant n(\varepsilon))$$

因为 send $\mathscr{A}_n$ 是紧的，这表明存在 $(x_n, r_n) \in \text{send}\,\mathscr{A}_n$ 使得

$$D((x, \mathscr{A}(x)), (x_n, r_n)) = D((x, \mathscr{A}(x)), \text{send}\,\mathscr{A}_n) < \varepsilon$$

即

$$|\mathscr{A}(x) - r_n| < \varepsilon \text{ 和 } d(x_n, x) < \varepsilon \qquad (n \geqslant n(\varepsilon))$$

由于 $(x_n, r_n) \in \text{send}\,\mathscr{A}_n$，$r_n \leqslant \mathscr{A}_n(x_n)$，所以

$$\mathscr{A}(x) < r_n + \varepsilon \leqslant \mathscr{A}_n(x_n) + \varepsilon,$$

(2b)成立。

必要性证毕。

（**充分性**） 证明当(1)、(2)对$\mathscr{E}$中某一$\mathscr{A}$和序列$\mathscr{A}_n$成立时有

$$H(\text{send}\,\mathscr{A}_n, \text{send}\,\mathscr{A}) \to 0.$$

(A) 由(1)可知对任意 $\eta > 0$，存在 $n_1(\eta)$ 使得当 $n \geqslant n_1(\eta)$ 时有

$$h^*(\text{sepp}\,\mathscr{A}_n, \text{supp}\,\mathscr{A}) \leqslant h(\text{supp}\,\mathscr{A}_n, \text{supp}\,\mathscr{A}) < \eta,$$

即在X中有

$$\text{supp}\,\mathscr{A}_n \subset S_\eta(\text{supp}\,\mathscr{A}),$$

或者在$X \times I$中有

$$\text{supp}\,\mathscr{A}_n \times I \subset S_\eta(\text{supp}\,\mathscr{A} \times I)$$

同样，由(2a)可知还存在 $n(\eta)$ 使得当 $n \geqslant n(\eta)$ 时对每一 $x \in X$ 可以找到序列 $x_n = x_n(x, \eta)$ 满足条件

$$\mathscr{A}_n(x) < \mathscr{A}(x_n) + \eta \text{ 和 } d(x_n, x) < \eta,$$

也即

$$[0, \mathscr{A}_n(x)] \subset [0, \mathscr{A}(x_n) + \eta] \text{ 和 } x \in S_\eta(x_n),$$

因此，对所有 $n \geqslant n(\eta)$ 和 $x \in X$ 有

$$\begin{aligned}\{x\} \times [0, \mathscr{A}_n(x)] &\subset S_\eta(x_n) \times [0, \mathscr{A}(x_n) + \eta) \\ &\subset S_\eta(\{x_n\} \times [0, \mathscr{A}(x_n)]) \\ &\subset S_\eta\Big(\bigcup_{y \in X} \{y\} \times [0, \mathscr{A}(y)]\Big) \\ &= S_\eta(\text{end}\,\mathscr{A})\end{aligned}$$

其中 $n(\eta)$ 与 x 无关。由此得出

$$\text{end}\,\mathscr{A}_n = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times [0, \mathscr{A}_n(x)] \subset S_\eta(\text{end}\,\mathscr{A}).$$

对于 $\varepsilon > 0$，设 η 就是引理中与 ε 和局部紧度量空间 $(X \times I, D)$ 中子集 end $\mathscr{A}$，supp $\mathscr{A} \times I$ 相应的，于是当 $n \geqslant n_2(\varepsilon) = \max\{n_1(\eta), n(\eta)\}$ 时，

$$\begin{aligned}\text{send}\,\mathscr{A}_n &= \text{end}\,\mathscr{A}_n \cap \text{supp}\,\mathscr{A}_n \times I \\ &\subset S_\eta(\text{end}\,\mathscr{A}) \cap S_\eta(\text{supp}\,\mathscr{A} \times I) \\ &\subset S_\varepsilon(\text{end}\,\mathscr{A} \cap \text{supp}\,\mathscr{A} \times I) \\ &= S_\varepsilon(\text{send}\,\mathscr{A}),\end{aligned}$$

即

$$H^*(\text{send}\,\mathscr{A}_n, \text{send}\,\mathscr{A}) < \varepsilon \qquad (n \geqslant n_2(\eta))$$

(B) 设 $\varepsilon>0$，由（2b），存在 $n(\varepsilon)$ 使得当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时对任意 $x\in \mathrm{supp}\,\mathscr{A}$ 可找到序列 $x_n\in \mathrm{supp}\,\mathscr{A}_n$ 满足条件

$$\mathscr{A}(x)<\mathscr{A}_n(x_n)+\varepsilon \text{ 和 } d(x_n,x)<\varepsilon.$$

又因为 $(x_n,\mathscr{A}_n(x_n))\in \mathrm{send}\,\mathscr{A}_n$ 对任意 n 成立，所以当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时

$$\begin{aligned}\{x\}\times[0,\mathscr{A}(x)]&\subset S_\varepsilon(x_n)\times[0,\mathscr{A}_n(x_n)+\varepsilon)\\&\subset S_\varepsilon(\{x_n\}\times[0,\mathscr{A}_n(x_n)])\\&\subset S_\varepsilon(\mathrm{send}\,\mathscr{A}_n)\end{aligned}$$

由于 $n(\varepsilon)$ 与 $x\in \mathrm{supp}\,\mathscr{A}$ 这一特例无关，从而

$$\mathrm{send}\,\mathscr{A}=\bigcup_{x\in \mathrm{supp}\mathscr{A}}\{x\}\times[0,\mathscr{A}(x)]\subset S_\varepsilon(\mathrm{send}\,\mathscr{A}_n),$$

即对任意 $n\geqslant n(\varepsilon)$，

$$H^*(\mathrm{send}\,\mathscr{A},\mathrm{send}\,\mathscr{A}_n)<\varepsilon.$$

从(A)和(B)得到，当 $n\geqslant \max\{n(\varepsilon),n_2(\varepsilon)\}$ 时，

$$H(\mathrm{send}\,\mathscr{A}_n,\mathrm{send}\,\mathscr{A})<\varepsilon,$$

因此 $H(\mathrm{send}\,\mathscr{A}_n,\mathrm{send}\,\mathscr{A})\to 0$。充分性证毕。

4．度量空间 $(\mathfrak{C},\delta)$

对 $\mathfrak{C}$ 中任意 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，可由其承集下方图形间的 Hausdorff 距离来定义 $\mathfrak{C}$ 上的度量 δ，

$$\delta(\mathscr{A},\mathscr{B})=H(\mathrm{send}\,\mathscr{A},\mathrm{send}\,\mathscr{B}).$$

因为 (X,d) 和 $(X\times I,D)$ 都是局部紧的，所以度量空间 $(\mathfrak{C},\delta)$ 也是局部紧的。同样，由 $X\times I$ 的所有非空紧子集构成的空间也是局部紧的，而且 $(\mathfrak{C},\delta)$ 可以看成是这一空间的子空间。参看 Kuratowski〔4，P，47〕.

设 A 是 X 的非空紧子集，则它的特征函数 χ_A 是 $\mathfrak{C}$ 的元素。因此，若 (X,d) 是可分的，则 $(\mathfrak{C},\delta)$ 也是可分的，其可数稠密子集为

$$\left\{\sum_{K=1}^{n} r_{i_k}\chi_{x_{j_k}}\,\middle|\, n=1,2,3,\cdots\right\}$$

其中 $\{r_i|i=1,2,3,\cdots\}$ 是 I 的可数稠密子集，$\{x_j|j=1,2,3,\cdots\}$ 是 (X,d) 的可数稠密子集。注意 $(\mathfrak{C},\delta)$ 不是完备的，例如对任意 $x_0\in X$，序列 $\{\chi_{x_0}/n\}$ 是 $(\mathfrak{C},\delta)$ 中的Cauchy序列，其唯一极限是 X 上的零函数 φ，那 $\varphi(x)=0$ $(x\in X)$，而这一零函数显然不是 $\mathfrak{C}$ 中元素。

任意紧集 $A\in C$ 与它的特征函数 $\chi_A\in\mathfrak{C}$ 都可以看成是等同的，例如 $\mathrm{supp}\chi_A=A$，$\mathrm{send}\chi_A=A\times I$。这里可把叠合映象 $i: C\to\mathfrak{C}$ 定义作 $i(A)=\chi_A$。由于对任意 A，$B\in C$ 有

$$\begin{aligned}\delta(i(A),i(B))&=\delta(\chi_A,\chi_B)\\&=H(A\times I,B\times I)\\&=h(A,B)\\&=h(i^{-1}(\chi_A),i^{-1}(\chi_B)),\end{aligned}$$

这个从 (C,h) 到 $(\mathfrak{C},\delta)$ 子空间 $i(C)$ 的映象是单射的和双边连续的。因此 i 是 (C,h)

在（$\mathfrak{C}$，δ）中的嵌入，这点与$\mathfrak{C}$中更一般的函数空间上的拓扑有很大不同，如点态（Pointwise）函数空间，一致收敛或L_1收敛函数空间上的拓扑。对于前两者，其叠合映象i是不连续的，而对第三者，其逆映象i的限定在$i(C)$上不连续。另外，在L_1收敛函数空间上的拓扑中，对那些仅在测度为零的集合上不同的函数是不加区别的。

5．在不分明集合理论中的应用

不分明集合的理论是由L.A.Zadeh[6]首次提出的，他试图建立一个严密的数学理论来处理那些在实质上具有不确定性（于是不同于统计学的变量），因而难以精确描述的系统或现象。这一思想已经广泛应用在系统理论、图形识别、人工智能、最优化以及决策理论等领域中。在[2]中，De．Kerf收集了这方面的广泛文献。

Zadeh在[6]中提出，空间X上的**不分明子集**是指函数$\mathscr{A}: X\to I$。对于每一个$x\in X$，数值$\mathscr{A}(x)$表示x在$\mathscr{A}$中的隶属程度：$\mathscr{A}(x)=0$表示x不是$\mathscr{A}$的成员，$\mathscr{A}(x)=1$表示x完全是$\mathscr{A}$的成员，$0<\mathscr{A}(x)<1$表示x部分地是$\mathscr{A}$的成员。集合X通常意义下的子集A(分明的）实际上也可以看作是X的不分明子集X_A，X的零函数φ叫作X的**空不分明子集**.

所谓X上的**不分明拓扑**是指满足某些公理，被指定为开集的X上一个不分明子集簇（参看Chang[1]）。若$1-\mathscr{A}$是开的，则不分明子集$\mathscr{A}$称作闭的。集合X上的**诱导不分明拓扑**是这样一个不分明拓扑，其中X_A为开集或闭集是由A在X中为开集或闭集决定的。在[5]中Weiss考虑了X上如下结构的诱导不分明拓扑，其中闭不分明子集$\mathscr{A}$是指X上一个上半连续函数，或end $\mathscr{A}$在$X\times I$上为闭集。另外，在他的定义中所谓X的紧不分明子集$\mathscr{A}$是指

$$\omega_r(\mathscr{A})=\{x\in X|\mathscr{A}(x)\geqslant r\}$$

对于I中每一个$r>0$均为X的紧子集。于是X上一个具有紧承集下方图形 send $\mathscr{A}$的不分明子集$\mathscr{A}$在这个诱导不分明拓扑中必然是紧不分明子集，但不是所有紧不分明子集都必然具有紧承集下方图形，因为其承集不一定是紧的。

从不分明集论的角度看，X上具有非空紧承集下方图形的函数$\mathscr{A}: X\to I$和度量δ构成的度量空间（$\mathfrak{C}$，δ）可以看作是Weiss定义的诱导不分明拓扑中X的非空紧不分明子集的子空间，这个子空间虽然没有全部的包括上述诱导不分明拓扑中非空紧不分明子集，但是在上一节讨论的叠合映象的意义下，它包含了X上全部通常意义下的紧子集（分明的）。

讨论度量空间（$\mathfrak{C}$，δ）的目的在于作者试图建立一种局部紧基本状态度量空间(X,d)上的不分明动态系统理论，以此作为状态空间X上一般（分明）动态系统理论的自然扩充。在[3]中，X上的不分明动态系统是作为$\mathfrak{C}$上的抽象动态系统来定义的。在这一定义下，由于叠和映象$i(A)=X_A$是（C，h）在（$\mathfrak{C}$，δ）中的嵌入，建立在经典集合论上的一般动态系统当然可以做为不分明动态系统的一种特殊情况。本文第三节定理中证明的收敛条件的等价性在[3]中将要多次用到。

（译自 Fuzzy sets and systems. 4. 1980. 193—201）

（潍肇基 译）

参考文献

[1] C.L.Chang. Fuzzy topological spaces, J.Math. Anal. Appl. 24(1968) 182—190.

[2] J.L.F. De. kerf. A bibliography on fuzzy sets, J. comput. Appl. Math. 1 (1975) 205—212.

[3] P.E. Kloeden, Fuzzy dynamical systems, Fuzzy sets and systems (Submitted).

[4] K. kuratowski, Topology, Vol. II (Academic press, London, New York. 1968)

[5] M.D.Weiss, Fixed points, separation and induced fuzzy topologies, J. Math. Anal. Appl. 50 (1975) 142—150.

[6] L. A. Zadeh, Fuzzy sets. Information and control 8 (1965) 338—353.